RÄKNEÖVNING

VECKA 3

David Heintz, 20 november 2002

Innehåll

1 Uppgift 32.2

Show that the solution of $\ddot{u}(t) + u(t) = 0$ **for** $t > 0$**,** $u(0) = r\cos(\alpha)$**,** $\dot{u}(0) = r\sin(\alpha)$**, is given by** $u(t) = r(\cos(t)\cos(\alpha) + \sin(t)\sin(\alpha)) = r\cos(t - \alpha)$**.**

Det finns två sätt att lösa uppgiften på: antingen kan vi beräkna $u(t)$ eller också kontrollerar vi om den givna lösningen satisfierar begynnelsevärdesproblemet (dvs. differentialekvationen med tillhörande villkor) genom insättning.

Det senare förslaget ligger kanske närmare till hands. Vi har att

$$\begin{cases} \ddot{u}(t) + u(t) &= 0,\ t > 0 \\ u(0) &= r\cos(\alpha) \\ \dot{u}(0) &= r\sin(\alpha) \end{cases}$$

med förslaget att $u(t) = r\cos(t - \alpha)$ (minns subtraktionssatsen för cosinus: $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$). Att som här beteckna en derivata med prickar görs ofta när man avser tidsderivator.

Först och främst tar vi reda på huruvuda ekvationen är uppfylld genom att derivera $u(t)$

$$\begin{aligned} u(t) &= r\cos(t - \alpha) \\ \dot{u}(t) &= -r\sin(t - \alpha) \\ \ddot{u}(t) &= -r\cos(t - \alpha), \end{aligned}$$

och vi ser direkt att $\ddot{u}(t) + u(t) = 0$. Villkoren är också giltiga, ty

$$\begin{aligned} u(0) &= r\cos(0 - \alpha) = r\cos(-\alpha) = r\cos(\alpha) \\ \dot{u}(t) &= -r\sin(0 - \alpha) = -r\sin(-\alpha) = r\sin(\alpha), \end{aligned}$$

där vi har utnyttjat att sinus är en udda och cosinus en jämn funktion (se uppgift 32.8).

Därmed är vi klara.

2 Uppgift 32.6

Show that $\sin(x) < x$ **for** $x > 0$**, and** $x < \tan(x)$ **for** $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

För att visa på den första olikheten minns vi att $\sin(x) \in [-1, 1]$ samt att x är en strängt växande funktion. I startvärdet $x = 0$ har de båda funktionerna samma värde (dvs. noll), varefter x växer snabbare än $\sin(x)$ eftersom

$$\begin{aligned} D\,x &= 1 \\ D\,\sin(x) &= \cos(x), \end{aligned}$$

där $\cos(x) \in [-1, 1]$. Vi noterar att intervallet av intresse egentligen var $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, då $\sin(x)$ inte är strängt växande, utan antar sitt största värde 1 i punkterna $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $(n \in \mathbb{N})$. Man brukar kalla en funktion som på detta sätt upprepas i tiden för en *periodisk funktion*, vilken kännetecknas av att $f(t + T) = f(t)$, där T är *perioden.* $\sin(t)$ har tydligen perioden $T = 2\pi$.

Den andra olikheten följer på liknande sätt. Vi konstaterar att

$$D\,\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 1 \text{ för } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right],$$

med $\tan(x) = x$ då $x = 0$. Båda funktionerna är växande på intervallet, men derivatan är större för $\tan(x)$, och olikheten följer.

Vi är klara.

3 Uppgift 32.8

Show the following relations from the definition, i.e., from the differential equation defining $\sin(x)$ **and** $\cos(x)$

a) $\sin(-x) = -\sin(x)$

b) $\cos(-x) = \cos(x)$

c) $\sin(\pi - x) = \sin(x)$

d) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$

e) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$

För att lösa dessa uppgifter skall vi visa att de båda leden är lika, dvs. att såväl VL som HL satisfierar differentialekvationen $\ddot{u}(t) + u(t) = 0$ (vilken, med olika villkor, definierar $\sin(x)$ och $\cos(x)$) med $u(0) = u_0$ samt $u(0) = u_1$. Kan vi göra det följer likheten tack vare (viktigt!) entydigheten hos lösningen (se Theorem 32.1).

Vi löser här två deluppgifter och lämnar resten som övning.

b)

Likheten $\cos(-x) = \cos(x)$ är ett typiskt exempel på en jämn funktion (där $f(-t) = f(t)$). I en plott åskådliggörs detta genom att funktionsgrafen är sin egen spegelbild i vertikalaxeln.

Vi har för vänsterledet

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(-x) \\ \dot{u}(t) &= \sin(-x) \\ \ddot{u}(t) &= -\cos(-x) \end{aligned}$$

där $\ddot{u}(t) + u(t) = -\cos(-x) + \cos(-x) = 0$, samt $u(0) = \cos(0) = 1$ och $\dot{u}(0) = \sin(0) = 0$. På samma sätt fås för högerledet

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos(x) \\ \dot{u}(t) &= -\sin(x) \\ \ddot{u}(t) &= -\cos(x) \end{aligned}$$

med $\ddot{u}(t) + u(t) = -\cos(x) + \cos(x) = 0$. Villkoren överensstämmer också enligt ovan då $u(0) = \cos(0) = 1$ och $\dot{u}(0) = -\sin(0) = 0$.

I och med att de båda leden uppenbarligen löser samma begynnelsevärdesproblem (med en unik lösning) måste de vara lika.

d)

Vi vill visa att $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ och använder samma lösningsgång som tidigare. Man får för VL

$$
\begin{aligned}
u(t) &= \cos(\pi - x) \\
\dot{u}(t) &= \sin(\pi - x) \\
\ddot{u}(t) &= -\cos(\pi - x)
\end{aligned}
$$

med $\ddot{u}(t) + u(t) = -\cos(\pi - x) + \cos(\pi - x) = 0$. Våra villkor blir $u(0) = \cos(\pi) = -1$ respektive $\dot{u}(0) = \sin(\pi) = 0$. Återstår att se om högerledet ger samma resultat.

$$
\begin{aligned}
u(t) &= -\cos(x) \\
\dot{u}(t) &= \sin(x) \\
\ddot{u}(t) &= \cos(x)
\end{aligned}
$$

där $\ddot{u}(t) + u(t) = \cos(x) - \cos(x) = 0$, och $u(0) = -\cos(0) = -1$, $\dot{u}(0) = \sin(0) = 0$. Vi har med andra ord att VL = HL och likheten gäller.

4 Uppgift 32.10

Compute the following integrals by integrating by parts

a) $\int_0^1 x^3 \sin(x)\, dx$

b) $\int_0^1 e^x \sin(x)\, dx$

c) $\int_0^1 x^2 \cos(x)\, dx$

Vi börjar kunna det här med partiell integration (om inte annat se tidigare räkneövningar) och ger oss snabbt i kast med uppgifterna. Notera att jag löser c) före a).

c)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^2 \cos(x)\, dx &= \left[\sin(x)\, x^2\right]_0^1 - 2\int_0^1 x \sin(x)\, dx \\
&= \sin(1) - 2\left(\left[-\cos(x)\, x\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\cdot 1\, dx\right) \\
&= \sin(1) - 2\left(-\cos(1) + \left[\sin(x)\right]_0^1\right) \\
&= \sin(1) - 2\left(-\cos(1) + \sin(1)\right) \\
&= 2\cos(1) - \sin(1).
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^3 \sin(x)\, dx &= \left[-\cos(x)\, x^3\right]_0^1 + 3\underbrace{\int_0^1 x^2 \cos(x)\, dx}_{=2\cos(1)-\sin(1)} \\
&= -\cos(1) + 3\left(2\cos(1) - \sin(1)\right) \\
&= 5\cos(1) - 3\sin(1).
\end{aligned}$$

b)

$$\int_0^1 e^x \sin(x)\, dx = \left[e^x \sin(x)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cos(x)\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= e\,\sin(1) - \left(\underbrace{\left[e^x \,\cos(x)\right]_0^1}_{=\,e\,\cos(1)-1} + \int_0^1 e^x \,\sin(x)\,dx \right) \\
&= e\,\sin(1) + 1 - e\,\cos(1) - \int_0^1 e^x \,\sin(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

ur vilket vi får att

$$
2\int_0^1 e^x \,\sin(x)\,dx \quad = \quad e\,(\sin(1) - \cos(1)) + 1,
$$

varför

$$
\int_0^1 e^x \,\sin(x)\,dx \quad = \quad \frac{1}{2}\,(e\,(\sin(1) - \cos(1)) + 1)
$$

och vi är klara.

5 Uppgift 32.14

Show that

a) $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$

c) $\arctan(-x) = -\arctan(x)$

d) $\text{arccot}(-x) = \pi - \text{arccot}(x)$

e) $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

f) $\arctan(x) + \text{arccot}(x) = \frac{\pi}{2}$

Vi har att visa på ett antal likheter, där lösningsgången mer eller mindre är densamma. Först och främst tar vi oss en titt på deluppgift b).

b)

Vi prövar att låta såväl VL som HL utgöra input åt $\cos(x)$ och skriver

$$\cos(\text{VL}) \quad = \quad \cos(\arccos(-x)) = -x$$

för vänsterledet samt

$$\cos(\text{HL}) \quad = \quad \cos(\pi - \arccos(x)) = -\cos(\arccos(x)) = -x$$

för högerledet (minns att $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ från 32.8d). Innebär det här att uppgiften är löst? Vi har ju att $\cos(\text{VL}) = \cos(\text{HL})$? Det är visserligen ett steg i rätt riktning, men inte ett fullständigt svar. Anledningen till det är att $\cos(x)$ inte är en injektiv funktion (dvs. att samma funktionsvärde återkommer för flera input; cosinus är precis som sinus en periodisk funktion). Våra två input skulle med andra ord kunna vara olika, men trots det ge samma svar. Vi räddas emellertid av att $\arccos \in [0, \pi] = I$ per definition. Därmed måste både VL och HL ligga i samma intervall, och på I är faktiskt $\cos(x)$ injektiv (närmare bestämt strängt avtagande). Därmed följer att leden är lika och uppgiften är löst.

6 Uppgift 32.15

Calculate analytically

a) $\arctan(\sqrt{2}-1)$

b) $\arctan\left(\frac{1}{8}\right)+\arctan\left(\frac{7}{9}\right)$

c) $\arcsin\left(\frac{1}{7}\right)+\arcsin\left(\frac{11}{4}\right)$

d) $\tan\left(\frac{\arcsin\left(\frac{3}{5}\right)}{2}\right)$

e) $\sin(2\arcsin(0.8))$

f) $\arctan(2)+\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

Vi löser i första hand deluppgift b).

b)

Vi noterar sambandet

$$\arctan(a)+\arctan(b) \quad = \quad \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

från (32.27) i AMBS. Därav fås att

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\frac{1}{8}\right)+\arctan\left(\frac{7}{9}\right) &= \arctan\left(\frac{\frac{1}{8}+\frac{7}{9}}{1-\frac{1}{8}\frac{7}{9}}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\frac{65}{72}}{1-\frac{7}{72}}\right) \\
&= \arctan(1)=\frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

och vi är klara.

7 Uppgift 32.16

Solve the equations

a) $\arccos(2x) = \arctan(x)$

b) $\arcsin(\cos(x)) = x\sqrt{3}$

Återigen riktar vi in oss på deluppgift b).

b)

Vi har att lösa

$$\arcsin(\cos(x)) \quad = \quad x\sqrt{3}$$

för x. Notera att $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ från 32.8e. Man kan därför skriva

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) &= x\sqrt{3} \\ \frac{\pi}{2} - x &= x\sqrt{3} \\ x &= \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\pi}{2\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{3}-1\right), \end{aligned}$$

efter att ha förlängt uttrycket med $\sqrt{3} - 1$ i sista steget.

8 Uppgift 32.21

Find the inverse $x = \mathbf{arcsinh}(y)$ of $y = \mathbf{sinh}(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ by solving for x in terms of y. Also find a similar formula for $\mathbf{arccosh}(y)$.

För att lösa de båda deluppgifterna tar vi hjälp av tipset i uppgiften.

a)

Vi har per definition att

$$y = \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right).$$

Multipliceras båda leden med e^x fås

$$y\,e^x = \frac{1}{2}\left(e^{2x} - 1\right),$$

och med $z = e^x$ ges

$$yz = \frac{1}{2}\left(z^2 - 1\right),$$

där vi har att lösa

$$z^2 - 2y\,z - 1 = 0,$$

en andragradsekvation med nollställena

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Går vi tillbaka från z till e^x erhålles

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1},$$

där x löses ut genom att ta den naturliga logaritmen för båda leden

$$x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right).$$

Men vi vet att input till $\ln(x)$ ska vara positivt och eftersom $\sqrt{y^2+1} > y$ ges att

$$x \;=\; \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right),$$

varmed inversen är bestämd.

b)

Att finna $\cosh^{-1}(x)$ görs på likartat sätt. Vi har att

$$y \;=\; \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right),$$

med $\cosh(x) \in [1, \infty]$. Därför är tydligen $y \geq 1$. Låt oss fortsätta som i föregående uppgift

$$y\,e^x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^{2x} + 1\right)$$

och med $z = e^x$ ges

$$y\,z \;=\; \frac{1}{2}\left(z^2 + 1\right).$$

Vi skall alltså lösa

$$z^2 - 2y\,z + 1 \;=\; 0,$$

med rötterna

$$z_{1,2} \;=\; y \pm \sqrt{y^2-1},$$

och kan gå tillbaka till den ursprungliga variabeln

$$e^x \;=\; y \pm \sqrt{y^2-1}.$$

För att överhuvud kunna bestämma en invers $x = f^{-1}(y)$ till $f(x)$ måste funktionen vara injektiv (annars kan vi inte bestämma någon entydig invers). Så är inte fallet för $\cosh(x)$ som är en jämn funktion. Vi koncentrerar oss därför på positiva reella axeln, dvs. låter $x \geq 0$, och får lösningen till problemet som (efter att ha tagit naturliga logaritmen för båda leden)

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right),$$

eftersom $\cosh(x)$ är injektiv för $x \geq 0$. Notera att den ena lösningen till andragradsekvationen faller bort, när x antas positiv. Vi är klara.