Studio 2b: Kurvor och ytor i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt04

29 januari 2004

1 Kurvor i $\mathbb{R}^2$

Matlab har redan använts för att plotta kurvor i planet. Mest har detta skett genom att ni plottat en funktions graf, $y = f(x)$:

```
>> x=0:.1:2;
>> y=x.^2;
>> plot(x,y)
```

En funktionsgraf är ett specialfall av den allmänna kurvan $g : I \to \mathbb{R}^2$ som för detta exempel skulle bli $g(t) = (t, t^2)$. I Matlab ser det nästan likadant ut:

```
>> t=0:.1:2;
>> plot(t,t.^2)
```

1.1 Uppgifter

Plotta följande kurvor
a) Asteroiden $g(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$
b) Cykloiden $g(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), 0 \leq t \leq 2\pi$
c) Kardoiden som definieras genom $r(\theta) = 1 - \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$, i polära koordinater, dvs $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$.

Tips: I uppgift c) måste du först forma funktionen g genom att betrakta θ som den variabel som parametriserar kurvan (istället för t) och utnyttja definitionen av kardoiden och variabeltransformationen mellan (r, θ) och (x, y). Prova också att använda Matlabs kommando `polar`.

2 Kurvor i $\mathbb{R}^3$

En kurva i rummet definieras som $g : I \to \mathbb{R}^3$. Ett exempel ges i *AMBS* i Figure 54.1 på sidan 791 där vi har $g : [0, 4] \to \mathbb{R}^3$ med $g(t) = (t^{1/2}\cos(\pi t), t^{1/2}\sin(\pi t), t)$. För att återskapa Figure 54.1 i Matlab använder vi kommandot `plot3`:

```
>> t=0:.1:4;
>> plot3(sqrt(t).*cos(pi*t),sqrt(t).*sin(pi*t),t)
```

2.1 Uppgifter

Plotta följande kurvor
a) $g(t) = (\cos(t), \sin(t), t), 0 \leq t \leq 2\pi$
b) $g(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), t), 0 \leq t \leq 2\pi$

3 Ytor

En yta skriver vi som $g : Q \to \mathbb{R}^3$, där $Q \subset \mathbb{R}^2$, eller så kan vi se den som grafen till en funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ då vi får $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$, jämför Example 54.6, sidan 792, i *AMBS*.

För att plotta ytor i Matlab måste vi börja med att skapa *matriser* `X` och `Y` som innehåller alla punkter (x_{ij}, y_{ij}) där vi vill beräkna vår funktion. Om området vi vill plotta vår funktion över är enhetskvadraten, kan vi göra detta med:

```
>> x = 0:.1:1;
>> y = 0:.1:1;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);   % X innehåller alla x_{ij}
                            % Y innehåller alla y_{ij}
```

Vi kan sedan skapa en matris `Z` med motsvarande funktionsvärden:

```
>> Z = X.*Y;   % f(x,y) = xy. Obs! ‘‘Punktvisa’’ operationer!
```

Slutligen skriver vi

```
>> surf(X,Y,Z)        % Alt. >> mesh(X,Y,Z)
```

för att plotta ytan.

Istället för att rita upp ytan är det ibland bättre att visualisera en funktion genom en konturplot, dvs vi ritar nivåkurvor i planet som binder samman punkter där $f(x, y) = c$ för olika c. Ett konkret exempel alla har sett är höjdkurvorna på en karta. I Matlab gör vi detta med kommandot `contour`:

```
>> contour(X,Y,Z,v)
```

där `v` är en vektor som innehåller värdena på de nivåer vi vill rita. (Man kan också utelämna detta argument och låta Matlab bestämma.)

3.1 Uppgifter

1. Plotta de ytor som är grafer till nedanstående funktioner med `surf`:

a)	$f(x,y) = (x^2 + y^2)^{1/2}$,	$(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$,
b)	$f(x,y) = x + 2y - 2$,	$(x,y) \in [1,2] \times [3,4]$,
c)	$f(x,y) = x^2 + y^2$,	$(x,y) \in [-1,1] \times [-1,1]$,
d)	$f(x,y) = (1 - y^2)^{1/2}$,	$(x,y) \in [0,3] \times [-1,1]$,
e)	$f(x,y) = x$,	$(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$,
f)	$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$,	$(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$,
g)	$f(x,y) = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$,	$(x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Tips: I *f)* och *g)* kan du använda *polära koordinater*. Börja med att skapa två lämpliga vektorer `r` och `phi` och därefter (med `meshgrid`) två motsvarande matriser `R` och `PHI`. Sedan kan du beräkna `X = R.*cos(PHI)` och `Y = R.*sin(PHI)`. Prova att ge kommandona:

```
>> subplot(1,2,1)
>> mesh(X,Y,zeros(size(X)))
>> view(2)
>> subplot(1,2,2)
>> mesh(R,PHI,zeros(size(X)))   % size(R) = size(X)!
>> view(2)
```

Vad ser du? Förklara!
Nu när du har beräknat `X` och `Y` kan du fortsätta på samma sätt som förut.

2. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y.$$

a) Plotta ytan över ett lämpligt område samt skapa en konturplot. Rita några enstaka nivåkurvor. (Titta i Matlabs hjälp `help contour` för att ta reda på hur man ska rita en enstaka nivåkurva.)
b) Bestäm eventuella maximi, minimi och sadelpunkter ur graferna.
Tips: Matlabs kommando `ginput` kan vara till hjälp.
c) (Extra) Bestäm alla stationära punkter till funktionen och avgör deras art analytiskt.