TMV035 Analys och linär algebra K Kf Bt, del A, 2006.
Sammanfattning. Läsanvisningar inför tentamen.

1. Talsystemen. (Adams P.1. Anteckningar från introkursen.)
$\mathbf{N}$ de naturliga talen
$\mathbf{Z}$ de hela talen
$\mathbf{Q}$ de rationella talen
räkneoperationer: addition $+$, multiplikation $\cdot$ (subtraktion $a-b=a+(-b)$, division $a/b=a\cdot(b^{-1})$)
kunna räknereglerna
kunna räkna med absolutbelopp, olikhet, intervall
rationellt tal = periodisk decimalutveckling
$\mathbf{R}$ de reella talen = alla decimalutvecklingar, periodiska och ickeperiodiska

2. Funktioner (Adams P.4)
$f : D_f \to \mathbf{R}$
definitionsmängd, målmängd, värdemängd, graf

2.1 Kombinera funktioner. (Adams P.5)
olika sätt att kombinera gamla funktioner och på så vis bilda nya funktioner
bilda linjär kombination: $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$
produkt och kvot av funktioner: $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$,
rationella funktioner "polynom genom polynom"
polynomdivision
sammansättning av funktioner $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

2.2 Polynomfunktioner. (Adams P.6)
kunna rita linjära funktioner $y = mx + b$, känna betydelsen av m och b
kunna rita kvadratiska funktioner $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = ax^2 + c$, $y = (x - d)^2$, och slutligen $y = ax^2 + bx + c$ genom komplettering av kvadraten $y = a(x - d)^2 - d^2 + c$, $d = b/(2a)$.
att kunna räkna med polynom: bilda linjär kombination, multiplicera, likhet mellan polynom, summabeteckning
styckvisa polynom

3. Gränsvärde och kontinuitet. (Adams kap 1, 9.1. Anteckningar.)

3.1 Definition gränsvärden.
$\lim_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$
Kunna använda definitionen på enkla exempel.

3.2 Räkneregler.
Kombination av gränsvärden. Utan bevis.

3.3 Definition av kontinuitet. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

3.4 Räkneregler.
Kombination av kontinuerliga funktioner. Utan bevis.

3.5 Lipschitz-kontinuitet.

kunna definition av Lipschitz-kontinuitet

kunna räkna ut Lipschitz-konstant för de enklaste fallen: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = \sqrt{x}$

Kombination av Lipschitz-funktioner: veta att linjär kombination, produkt, kvot och sammansättning av Lipschitz-funktioner ger Lipschitz-funktioner

veta att Lipschitz-funktion är begränsad funktion

3.6 Cauchy-följd.

kunna definition av Cauchy-följd

kunna visa att de enkla fallen är Cauchy: $a_n = 1/n$, $a_n = 1/n^2$, $1/\sqrt{n}$

kunna sambandet Cauchy-följd = decimalutveckling = reellt tal

3.7 Kvadratroten ur 2.

kunna visa att kvadratroten ur 2 inte är rationellt tal

kunna skriva ned bisektionsalgoritmen

3.8 Satser om kontinuerliga funktioner

kunna **Bolzanos sats** och dess **bevis** (Anteckningar)

obs bevisets fyra steg:

1. algoritm (som ger en följd x_i) (bisektionsalgoritmen)
2. x_i är Cauchy-följd: $x_i - x_j \to 0$, $\bar{x} = \lim x_i$
3. $\bar{x}$ löser ekvationen: $f(\bar{x}) = \lim f(x_i) = 0$
4. unik lösning om f är strängt monoton

kunna satsen om mellanliggande värden (Adams Theorem 9) (utan bevis)

kunna satsen om max-min (Adams Theorem 8) (utan bevis)

4. Fixpunkter och kontraktionsavbildning. (Anteckningar)

omskrivning av ekvation mellan "rotform" $f(x) = 0$ och "fixpunktsform" $x = g(x)$

kunna **fixpunktssatsen för kontraktioner** och dess **bevis** (Anteckningar)

obs bevisets fyra steg:

1. algoritm (som ger en följd x_i) (fixpunktsiteration)
2. x_i är Cauchy-följd: $x_i - x_j \to 0$, $\bar{x} = \lim x_i$ (räcker att kunna visa $|x_{k+1} - x_k| \leq L^k |x_1 - x_0|$)
3. $\bar{x}$ löser ekvationen: $\bar{x} = \lim x_{i+1} = \lim g(x_i) = g(\bar{x})$
4. unik lösning

5. Geometri i rummet. (Adams kap 10.1-10.5)

vektor, norm, skalärprodukt, ortogonalitet om och endast om $a \cdot b = 0$, projektion, kryssprodukt, volym av parallellepiped, trippelprodukt, ekvationer för linjen och planet

6. Derivatan. (Adams kap 2.1-2.8)

6.1 Definition, räkneregler och enkla fall.

kunna derivatans definition

kunna beräkna derivatan utgående från definitionen för de enklaste fallen: $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = \sqrt{x}$

numerisk beräkning av derivata

räkneregler för kombinationer av derivator

derivata av sin, cos, tan, cot (använd inte csc, sec)

6.2 Medelvärdessatsen MVS.

kunna **medelvärdessatsen** MVS (Adams Theorem 11) och **generaliserade** MVS (Adams Theorem 16) (utan bevis, skippa även Theorem 15)

kunna konsekvenser av MVS:

monoton funktion (Adams Theorem 12) med **bevis**

konstant funktion (Adams Theorem 12) med **bevis**

beräkning av Lipschitzkonstant, med **bevis**, dvs följande:

Sats. (Beräkning av Lipschitzkonstant) Om

$$|f'(x)| \leq M, \quad \forall x \in I,$$

så gäller

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in I,$$

dvs $L_f \leq M$.

Bevis. MVS ger en (okänd) punkt c mellan x och y sådan att

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| = |f'(c)|\,|x - y| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in I.$$

$\square$

6.3 Linjärisering. (Adams 4.7)

kunna skriva ned linjäriseringen av f i punkten a

kunna felformeln (Adams Theorem 9) med **bevis**

kunna uppskatta linjäriseringsfelet med hjälp av felformeln

6.4 Newtons metod. (Adams 4.6. Anteckningar.)

kunna motivera Newtons metod med hjälp av linjärisering

geometrisk tolkning med hjälp av tangent

känna till feluppskattning (Adams Theorem 7)

känna till stoppvillkoret

kunna skriva ned algoritmen

7. Matlab och programmering. (Jönsson kap 1-7)

Grundläggande kommandon och funktioner.

Tal, vektor, textsträng.

Plottning. Text i grafik. Exportera bilder i jpg, gif eller pdf-format.

Programmering med **huvudprogram**i skriptfil **som anropar funktioner** (i funktionsfiler) och funktioner som anropar andra funktioner.

8. Litteratur.

Adams kapitel: P (delvis), 1, 2.1–2.8, 4.6–4.7, 9.1, 10.1-10.5

Föreläsningsanteckningar, se hemsidan "Övrigt kursmaterial".

Studioövningar, se veckoprogram.

Jönsson kapitel 1–7.

`2006-10-19 /stig`