STUDIO 1.1 – MATRISER

MATLAB betyder "Matrix Laboratory" och bygger på numeriska matrisberäkningar. Vi ska nu (äntligen) börja använda matriser.

0.1. **Matriser.** En matris är ett rektangulärt talschema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Matrisen ovan har m rader och n kolonner, vi säger att den är av typ $m \times n$. Ett matriselement i rad nr i, kolonn nr j tecknas a_{ij}, där i är radindex och j är kolonnindex. I MATLAB skrivs detta `A(i,j)` och `size(A)` ger matrisens typ.

En matris av typ $m \times 1$ kallas kolonnmatris (kolonnvektor) och en matris av typ $1 \times n$ kallas radmatris (radvektor):

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1, & \dots, & b_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

Du kommer att se att vi använder oftast kolonnvektorer för att representera kvantiteter som vi beräknar. Element nr i ges i MATLAB av `a(i), b(i)` och antalet element ges av `length(a)`.

Övning 1. Skriv in följande matriser i MATLAB.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skriv ut matriselementen a_{23}, b_{23}, x_2. Prova `size, length`. Tips: A skrivs

```
A=[1, 5, 9; 2, 6, 10; 3, 7, 11; 4, 8, 12]
A(2,3)
```

Ändra b_{23} genom att skriva `B(2,3)=5`. □

En matris kan betraktas som en kollektion av kolonner:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

med kolonnerna

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Man kan även betrakta den som en kollektion av rader, men vi använder oftast kolonnrepresentationen. I MATLAB plockar man ut kolonn nr j med `A(:,j)`. Här är j kolonnindex medan radindex $i = 1, \dots m$ representeras av tecknet kolon `:`. På liknande vis ges rad nr i av `A(i,:)`.

Övning 2. Skriv ut kolonn nr 1, 2 och 3 ur matrisen A. Sätt in kolonnvektorn x som första kolonn i B genom att skriva `B(:,1)=x`. □

Övning 3. Radera matrisen B (`clear B`) och skriv in den igen genom att först bilda kolonnerna

$$b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och sedan sätta in dem i matrisen $B = [b_1, b_2, b_3]$. □

0.2. **Matris-vektor-multiplikation.** Vi definierar produkten av en radmatris och en kolonnmatris (med samma antal element) enligt:

$$ax = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Observera att detta är samma formel som för skalärprodukt. Produkten $y = Ax$ av en matris av typen $m \times n$ och en kolonnvektor av typen $n \times 1$ definieras på liknande vis genom att vi multiplicerar matrisens rader i tur och ordning med kolonnvektorn. Vi får en kolonnvektor av typen $m \times 1$ och den ges av

$$y = Ax$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix},$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n.$$

Obs att typerna måste stämma överens för att produkten ska vara definierad enligt regeln $m \times 1 = (m \times n)(n \times 1)$. I Matlab skriver man helt enkelt `y=A*x`.

Övning 4. Beräkna följande produkter, först för hand sedan med Matlab. Samma matriser som i tidigare övningar.

$$Ax, \quad Bx, \quad ax, \quad Aa.$$

□

Speciella matriser. Matlab har funktionerna `zeros, ones, eye` för att bilda speciella matriser med nollor, ettor och enhetsmatris.

Övning 5. Prova följande

```
zeros(1), zeros(2,5), zeros(size(A))
ones(1), ones(2,5), ones(size(A))
eye(1), eye(2,5), eye(size(A))
```

Skapa matris kolonnvis. Vi bygger ofta upp matriser med hjälp någon beräkningsalgoritm, ibland görs beräkningen kolonnvis. Vi ger ett exempel. Matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 10 \end{bmatrix}$$

skapas av `for`-loopen

```
clear C;
ett=ones(4,1);
for i=1:10
  C(:,i)=i*ett;
end
```

Skriv en skriptfil som gör detta. Tag bort semikolon så att du ser vad som händer i varje steg.

Övning 6. Låt

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Skriv en `for`-loop som skapar matrisen $X = [x_1, x_2, \ldots, x_5]$ där

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad x_i = Kx_{i-1}.$$

□

Linjärt ekvationssystem. Matriser används bland annat för att skriva ned linjära ekvationssystem. Exempel: ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 14 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 7x_1 + 8x_2 &= 23 \end{aligned}$$

kan skrivas på matrisform

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix},$$

dvs

$$Ax = y, \quad \text{med } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

Vi ska senare lära oss hur man löser sådana ekvationssystem. I Matlab finns "backslash"-kommandot som löser systemet:

```
x=A\y
```

Övning 7. Skriv ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= 29 \\ 2x_1 + 5x_3 &= 26 \\ 3x_1 + 7x_2 + 11x_3 &= 39 \end{aligned}$$

på matrisform och lös med "backslash".