Ordinära differentialekvationer 3

1.1 Allmänt system av ODE

Vi har nu löst differentialekvationer

$$u'(x) = f(x, u(x))$$

i några specialfall där f bara beror av x (`myprim.m`):

$$u'(x) = f(x)$$

och bara beror av u (`myexp.m`):

$$u'(x) = u(x)$$

och även system av denna senare typ (`mytrig.m`):

$$\begin{aligned} u_1'(x) &= u_2(x), \\ u_2'(x) &= -u_1(x). \end{aligned}$$

Vi ska nu behandla differentialekvationer där $f(x, u)$ är en allmän funktion av både x och u. Till exempel,

$$u'(x) = -xu(x), \ x \in [0, 3]; \quad u(0) = 1,$$

med analytisk lösning $u(x) = \exp(-x^2/2)$. Verifiera detta! Här ges alltså $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ av formeln $f(x, s) = -xs$. När vi sätter in i högerledet av differentialekvationen ersätter vi den andra variabeln s med $s = u(x)$. Vi ska även studera system av sådana ekvationer.

Vi kommer då till ett allmänt system av n stycken differentialekvationer:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= f_1(t, u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad t \in [a, b], \\ &\vdots \\ u_n'(t) &= f_n(t, u_1(t), \dots, u_n(t)), \quad t \in [a, b], \end{aligned}$$

tillsammans med lika många begynnelsevillkor:

$$\begin{aligned} u_1(a) &= u_{a1} \\ &\vdots \\ u_n(a) &= u_{an}. \end{aligned}$$

Vi skriver dessa på matrisform:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}, \quad u_a = \begin{bmatrix} u_{a1} \\ \vdots \\ u_{an} \end{bmatrix}, \quad f(t, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, \dots, u_n) \\ \vdots \\ f_n(t, u_1, \dots, u_n) \end{bmatrix},$$

och får följande begynnelsevärdesproblem

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t)), \quad t \in [a, b], \\ u(a) &= u_a. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] `2006-11-21 /stig`

För att lösa detta använder vi samma algoritm som tidigare (Eulers metod). Vi börjar med att dela in intervallet $[a, b]$ i N stycken delintervall av längden $h = (b - a)/N$:

$$
\begin{aligned}
&a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots t_{i-1} < t_i < \cdots < t_{N-1} < t_N = b, \\
&t_i = a + hi, \; h = (b - a)/N = t_i - t_{i-1}.
\end{aligned}
$$

Vi beräknar nu en approximativ lösning enligt

$$
\begin{aligned}
&U(t_0) = u_a \\
&U(t_i) = U(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, U(t_{i-1})).
\end{aligned}
$$

Genom att förbinda punkterna $(t_i, U(t_i))$ med räta linjer får vi en graf och funktionen $U(t)$ blir definierad också mellan beräkningsnoderna t_i.

Implementering i Matlab

Algoritmen är

$$
\begin{aligned}
&\text{initiera:} \; \begin{cases} t_0 = a \\ U(t_0) = u_a \end{cases} \\
&\text{uppdatera:} \; \begin{cases} \text{while } t_i < b \\ t_i = t_{i-1} + h \\ U(t_i) = U(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, U(t_{i-1})). \end{cases}
\end{aligned}
$$

Övning 1. Skriv ett program `myode.m` med anropet `[t,U]=myode(f,I,ua,h)` som löser begynnelsevärdesproblemet (1). Du skall använda programskalet `myode.m`. Programmet blir en enkel modifikation av ditt tidigare program `mytrig.m`.

Prova programmet på följande begynnelsevärdesproblem. För varje exempel måste du skriva en funktionsfil av typen

```
function y=funk(t,u)
```

Plotta den numeriska lösningen tillsammans med den analytiska lösningen.

$$
(a) \qquad \begin{cases} u'(x) = x^2, \quad x \in [1, 3], \\ u(1) = 1. \end{cases}
$$

$$
(b) \qquad \begin{cases} u'(t) = u(t), \quad t \in [0, 2], \\ u(0) = 1. \end{cases}
$$

$$
(c) \qquad \begin{cases} \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 10], \\ u(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}
$$

$$
(d) \qquad \begin{cases} u'(x) = -xu(x), \quad x \in [0, 3], \\ u(0) = 1. \end{cases}
$$

analytisk lösning: $u(x) = \exp(-x^2/2)$

□

Facit

```
function y=funka(t,u)
y=t^2;
>> [x,U]=myode(@funka,[1,3],1,1e-3)

function y=funkb(t,u)
y=u;
>> [t,U]=myode(@funkb,[0,2],1,1e-3)

function y=funkc(t,u)
A=[0 1;-1 0];
y=A*u;
>> [t,U]=myode(@funkc,[0,3],[0;1],1e-3)

function y=funkd(t,u)
y=-t*u;
>> [x,U]=myode(@funkd,[0,3],1,1e-3)
```

1.2 Populationsdynamik

Vi betraktar population av bytesdjur (kaniner) som lever tillsammans med en population rovdjur (rävar). Låt $u_1(t)$ respektive $u_2(t)$ beteckna antalet kaniner respektive rävar vid tiden t. En enkel matematisk modell för populationernas utveckling ges av Volterra-Lotka-ekvationerna:

$$\begin{aligned} u_1'(t) &= au_1(t) - bu_1(t)u_2(t) \\ u_2'(t) &= -cu_2(t) + du_1(t)u_2(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Koefficienterna a, b, c, d är positiva. Termen $au_1(t)$ representerar netto-födelse-dödstalet i en ensam kaninpopulation. Termen $-cu_2(t)$ är motsvarande för rävarna. Termen $-bu_1(t)u_2$ är antalet kaniner som blir uppätna per tidsenhet. Termen $du_1(t)u_2(t)$ är antalet rävar per tidsenhet som överlever på grund av tillgång på föda.

Observera teckenkombinationen i ekvationerna. Vad blir lösningen om populationerna är ensamma ($b = d = 0$)?

Lös Volterra-Lotka-ekvationerna med ditt program `myode.m`. Lämpliga värden är $a = .5, b = 1, c = .2, d = 1$.

Facit

Med $b = d = 0$ får vi $u_1(t) = u_{01}\exp(at)$, $u_2(t) = u_{02}\exp(-ct)$, dvs kaninpopulationen exploderar och rävarna dör ut.
Matlab funktionsfil:

```
function y=volterra(t,u)
a=.5; b=1; c=.2; d=1;
y=zeros(2,1);
y(1)= a*u(1)-b*u(1)*u(2);
y(2)=-c*u(2)+d*u(1)*u(2);
```

Matlab kommandon:

```
>> [t,U]=myode(@volterra,[0 50],[.5;.3],1e-2);
>> figure(1)
>> plot(t,U)
>> figure(2)
>> plot(U(:,1),U(:,2))
```