TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2004-11-04, kl 8:30-13:30.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42
Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och lexikon.

1) a) Härled väntevärdet av Poissonfördelningen. (1p)

   b) Låt livslängden för en person vald på måfå från en population vara exponentialfördelad med väntevärde 70 (år). Approximera sannolikheten att mindre än 3 av 20 personer ur populationen lever längre än 90 år genom att använda en lämplig Poissonfördelning. (2p)

2) Man kastar en tärning 12 gånger. Vad är sannolikheten att varje antal ögon inträffar minst en gång? (3p)

3) Det finns tre olika fågelarter på en ö: 45% av fåglarna är av art 1 (10% av vilka är ringmärkta), 38% av art 2 (15% av vilka är ringmärkta) och 17% av art 3 (50% av vilka är ringmärkta).

   a) Man har observerat en ringmärkt fågel. Vad är då sannolikheten att den är av art 1 eller 2? (1.5p)

   b) Man har observerat en fågel som inte är ringmärkt. Vad är nu sannolikheten att den är av art 3? (1.5p)

4) Man delar N personer i n ($n = 1, 2, ...$) grupper, k ($k = 2, 3, ...$) personer i varje. Man tar ett blodprov från varje person och samlar ihop proven inom var och en av grupperna. Om denna blandning av k blodprov ger ett negativt resultat (ingen sjukdom), har man klarat alla k personerna. Om resultatet är positivt, undersöker man blodproven av de k personerna separat. Antag att sannolikheten att ha sjukdomen är p. Beräkna det förväntade antalet undersökningar av blodprov som behövs att utföra. Om $N = 100$, $k = 20$ och $p = 0.05$, är det värt att använda den här metoden jämfört med att bara undersöka alla prov separat? (3p)

5) Livslängden av en komponent är normalfördelad med väntevärde $\mu = 160$ (dygn) och variansen σ^2.

   a) Ledningen av fabriken vill garantera att sannolikheten att livslängden är mellan 120 och 200 är minst 0.8. Vad är det största värdet av σ, som uppfyller egenskapen ovan? (Desto mindre σ desto dyrare är tillverkningen av komponenter.) (1.5p)

   b) Anta att 190 dygn efter tillverkningen av komponenterna undersöker man en komponent åt gången. Vad är sannolikheten att man måste undersöka fler än två komponenter tills man hittar en komponent som fortfarande fungerar? (1.5p)

Lycka till!

Questions in English (Sannolikhetsteori 1)

1) a) Derive the expected value of a Poisson distribution. (1p)

   b) Let the life time of a random person from a population follow the exponential distribution with expectation 70 (years). Approximate the probability that less than 3 of 20 people from the population live longer than 90 years by using an appropriate Poisson distribution.(2p)

2) A dice is rolled 12 times. What is the probability that every possible face occurs at least once? (3p)

3) An island has three species of bird: Species 1 accounts for 45% of the birds, of which 10% are tagged. Species 2 accounts for 38% of the birds, of which 15% are tagged. Species 3 accounts for 17% of the birds, of which 50% are tagged.

   a) If a tagged bird is observed, what is the probability that it is either of species 1 or species 2? (1.5p)

   b) If an untagged bird is observed, what is the probability that it is of species 3? (1.5p)

4) We divide N people into n ($n = 1, 2, ...$) groups each consisting of k ($k = 2, 3, ...$) people. We take a blood sample from each person and combine the samples from within each group. If this mixture of k samples gives a negative result (no disease), we are done with these k people. If the result is positive we have to examine the blood samples of the k people separately. Let the probability to have the disease be p. Compute the expected number of tests of the blood samples that need to be made. If $N = 100$, $k = 20$ och $p = 0.05$, is it better to use this method or the method, where all blood samples are examined separately? (3p)

5) Let the life length of a component follow a normal distribution with expected value $\mu = 160$ (days) and variance σ^2.

   a) Managers of a factory want to garantee that the life time of a component is between 120 and 200 with probability at least 0.8. What is the largest value of σ that fulfils this condition? (The smaller σ the more expensive it is to produce these components.) (1.5p)

   b) Assume that 190 days after the components have been made we check one component at a time. What is the probability that we have to go through more than two components until we find one component that is still working? (1.5p)

Good luck!