

**TENTAMEN:** Sannolikhets teori 1, del 2. 2005-12-19, kl 8:30-13:30.

**Lärare och jour:** Aila Särkkä, telefon 772 35 42

**Hjälpmedel:** Valfri räknare med tömda minnen och lexikon.

- 1) a) Bevisa att  $\text{Cov}(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$ . (1.5p)  
b) Härleda variansen av en summa av stokastiska variabler (som inte behöver vara oberoende). (1.5p)
- 2) Låt  $X$  och  $Y$  vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler med resp. parametrar  $\lambda_1$  och  $\lambda_2$ . Härleda täthetsfunktionen för  $X/Y$ ? (3p)
- 3) Anta att man i varje cornflakes-paket får en av de totalt sju figurerna. Varje figur har en lika stor sannolikhet att finnas i ett paket.
  - a) Vad är det förväntade antalet olika figurer bland 10 figurer? (2p)
  - b) Anta att du har fått 5 olika figurer. Vad är fördelningen för antal paket du behöver köpa för att få en av de två figurerna du ännu inte har? (1p)
- 4) Det nuvarande priset av en aktie är  $s$  kronor. Efter ett dygn kommer priset att vara antingen  $us$  med sannolikhet  $p$  eller  $ds$  med sannolikhet  $1 - p$ . Man antar att de successiva prisändringarna är oberoende av varandra. Approximera sannolikheten att aktiepriset kommer att vara minst 30% högre efter 1000 dygn om  $u = 1.012$ ,  $d = 0.990$  och  $p = 0.52$ . (3p)
- 5) Det är lika sannolikt att ha 2, 3 eller 4 läkare på en vårdcentral en viss dag. Oberoende av hur många läkare det finns på plats, är antalen patienter som läkarna tar emot (under en viss dag) oberoende Poisson-variabler med väntevärdet 30. Beräkna väntevärdet och variansen av antalet patienter som tas emot på vårdcentralen under en viss dag. (3p)
- 6) Antag att det kommer genomsnittligt 7 patienter/timme till ett sjukhus och att antalet patienter som kommer följer en Poissonprocess. För en viss dag, f.o.m. midnatt, vad är sannolikheten att
  - a) exakt 12 patienter kommer mellan 6 och 8? (1p)
  - b) minst en patient kommer mellan 16 och 17 och minst en mellan 18 och 20? (1p)
  - c) den tredje patienten den dagen kommer under den andra halvtimmen av dygnet? (1p)

**Lycka till!**

## Questions in English (Sannolikhetsteori 1)

- 1) a) Show that  $\text{Cov}(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{j=1}^m Y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \text{Cov}(X_i, Y_j)$ . (1.5p)  
b) Derive the variance of a sum of random variables (which do not have to be independent). (1.5p)
- 2) Let  $X$  and  $Y$  be independent exponential random variables with respective parameters  $\lambda_1$  and  $\lambda_2$ . Find the density function of  $X/Y$ ? (3p)
- 3) Let us assume that we get one of seven possible figures in every cornflakes package. Each figure is as likely to be in a package.
  - a) What is the expected number of different figures among 10 packages? (2p)
  - b) Assume that you already have five different figures. What is the distribution of the number of packages you still have to buy in order to get one of the remaining two figures? (1p)
- 4) A model for the movement of stock supposes that if the present price of the stock is  $s$ , then after one day it will be either  $us$  with probability  $p$ , or  $ds$  with probability  $1 - p$ . Assuming that successive movements are independent, approximate the probability that the stock's price will be up at least 30 percent after the next 1000 days if  $u = 1.012$ ,  $d = 0.990$  and  $p = 0.52$ . (3p)
- 5) Assume that it is equally likely to have 2, 3 or 4 doctors at a hospital on a certain day. Independently of how many doctors there are at the hospital on a given day, the number of patients that are seen by the doctors are independent Poisson random variables with mean 30. Compute the expected value and variance of the number of patients seen by some doctor at the hospital a given day. (3p)
- 6) It is known that, on average, 7 patients per hour arrive at an emergency room and, moreover, that the number of patients constitutes a Poisson process. For a given day, starting at midnight, find the probability that
  - a) exactly 12 patients arrive between 6 and 8. (1p)
  - b) at least one patient arrives between 16 and 17 and at least one patient between 18 and 20. (1p)
  - c) the third patient of the day arrives during the second half hour of the day. (1p)

**Good luck!**