0. Inledning

de Mérés problem: (de Méré var en hasardspelare i Frankrike på 1600-talet) de Méré hade upptäckt empiriskt att

a) det lönar sig att slå vad att om man kastar en tärning fyra gånger, får man minst en sexa

b) det inte lönar sig att slå vad att om man kastar två tärningar 24 gånger, får man minst ett par av sexor.

de Méré kunde inte förklara det här teoretiskt men fick hjälp från Pascal ungefär 1650. Man säger att sannolikhetsteorin började utvecklas då.

Kvalitetskontroll: En bilfabrik köper 1000 bildelar och undersöker 75 av dem. Om man hittar fler än två felaktiga enheter, återsänder man hela partiet till leverantören. Annars accepterar man det.

Är kontrollsystemet effektivt? Säg att ett parti innehåller 20 felaktiga enheter. Hur stor är då sannolikheten att partiet kommer att godkännas?

Gemensamt för både exempel är att det föreligger variabilitet i mätningarna/resultaten. Man får inte alltid samma resultat, får inte säkra resultat, men får bara sannolikheten för ett visst resultat. För att lösa problemen ovan behöver man stokastiska (=gissning) modeller, slumpmodeller.

1. Kombinatorik

Ex. På hur många olika sätt kan en komitté av två väljas bland fyra personer? På hur många olika sätt kan en komitté av 12 väljas bland 100 personer?

Ex. På hur många olika sätt kan två böcker ordnas? På hur många olika sätt kan 50 böcker ordnas?

Man behöver ett effektivt sätt att räkna antal konfigurationer. Den matematiska teorin kallas *kombinatorik*.

1.2 Multiplikationsprincipen

Multiplikationsprincipen: Anta att man utför två experiment. Det första har m möjliga utfall och för varje utfall av det första experimentet har det andra n olika utfall. Då finns det sammanlagd $m \cdot n$ möjliga utfall av de två experimenten.

Generellt: Anta att man utför r experiment. Det första har n_1 möjliga utfall och för varje utfall av det första experimentet har det andra n_2 olika utfall och för varje utfall av det första och det andra experimenten har det tredje n_3 möjliga utfall osv. Då finns det totalt $n_1 n_2 \cdot ... \cdot n_r$ möjliga utfall av de r experimenten.

Ex: På menyn av en restaurang finns det 3 soppor, 5 förrätter, 8 huvudrätter och 4 efterrätter. Hur många olika fullständiga menyer (soppa, förrätt, huvudrätt och efterrätt) kan man välja?

1.3 Permutationer

På hur många olika sätt kan tre (n) personer ordnas i rad?

Ex. 3b: Det finns 6 pojkar och 4 flickor i klassen. Alla har ett test och testresultaten rangordnas. Man antar att inga två elever får samma antal poäng.

a) Hur många olika rangordningar är möjliga?

b) Hur många olika rangordningar är möjliga om pojkarna rangordnas bland sig själva och flickorna bland sig själva?

Ex.3d: Hur många olika bokstavskombinationer är möjliga om man använder ordet PEPPER?

Generellt: Anta att man har n olika objekter (bokstäver) bland vilka n_1 är lika, n_2 är lika,..., n_r är lika. Då finns det

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdot ... \cdot n_r!}$$

permutationer av n objekter.

1.4 Kombinationer

Hur många olika grupper av 3 (r) kan man välja bland 5 (n) personer?

Ex.4b: Man har en grupp av 5 kvinnor och 7 män. Hur många komittéer

a) med 3 kvinnor kan man välja?

b) med 2 kvinnor och 3 män kan man välja?

c) med 2 kvinnor och 3 män kan man välja om två av männen vägrar att sitta på samma komitté?

Binomialsatsen: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Ex. 4e: Hur många delmängder har en mängd som har n elementer?

1.5 Multinomialkoefficienter

n olika objekt skulle delas i r separata grupper av storlekar n_1, n_2,..., n_r, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$. Hur många indelningar finns det?

Ex.5b: 10 barn delas i lag A och lab B, 5 barn i vardera. Hur många olika indelningar finns det?

Ex.5c: 10 barn delar dem själva i två grupper, 5 barn i vardera. Hur många olika indelningar finns det nu?

Multinomialsatsen:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, ..., n_r} x_1^{n_1} \cdot ... \cdot x_r^{n_r},$$

där summan är över alla ickenegativa heltalsvektorer $(n_1, n_2, ..., n_r)$ för vilka $n_1 + n_2 + ... + n_r = n$.

1.6 Bollar i urnor

n **bollar i** r **urnor**: Om man kan skilja de n bollarna från varandra (t. ex. alla har olika färg), finns det r^n olika sätt att stoppa dem i de r urnorna.

Anta att man inte kan skilja bollarna från varandra. Hur många olika sätt finns det då? Utfallet kan skrivas som en vektor $(x_1, x_2, ..., x_r)$, där x_i är antalet bollar i den $i$te urnan.

Proposition 6.1: Det finns $\binom{n-1}{r-1}$ olika positiva heltalsvektorer $(x_1, x_2, ..., x_r)$ sådana att $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$, $x_i > 0$ för varje i.

Proposition 6.2: Det finns $\binom{n+r-1}{r-1}$ olika ickenegativa heltalsvektorer $(x_1, x_2, ..., x_r)$ sådana att $x_1 + x_2 + ... + x_r = n$, $x_i \geq 0$ för varje i.

Ex. 6b: Du har $20,000 och du vill investera pengarna bland fyra ändamål. Enhetan av var och en av investeringar måste vara $1,000. Hur många investeringsstrategier har du om du vill investera alla dina pengar? Hur många strategier finns det om det inte behövs att investera alla pengar man har?