2. Kolmogorovs axiomsystem

2.2 Utfallsrum och händelser

Definition: Mängden av alla möjliga utfall av ett experiment kallas ett *utfallsrum* av experimentet. Det betecknas av S.

Ex: Ett mynt kastas en gång. Då är utfallsrummet

$$S = \{kl, kr\}.$$

Om två mynt kastas en gång, är

$$S = \{(kl, kl), (kl, kr), (kr, kl), (kr, kr)\}.$$

Ex: En tärning kastas. Då är

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Om två tärningar kastas, är

$$S = \{(i, j),\ i, j = 1, ..., 6\}.$$

Ex: Man mäter livslängden av en glödlampa. Då är

$$S = \{x : 0 \le x \le \infty\}.$$

Definition: Varje delmängd E av ett utfallsrum kallas en *händelse*. Om ett utfall är i E, säger man att E *inträffar*.

Ex: Ett mynt kastas. Utfallsrummet är $S = \{kl, kr\}$. Om $E = \{kr\}$, då är E en händelse att man får en krona. Om $F = \{kl\}$, då är F en händelse att man får en klave.

Ex: Två mynt kastas. Utfallsrummet är $S = \{(kl, kl), (kl, kr), (kr, kl), (kr, kr)\}$. Om $E = \{(kl, kl), (kl, kr), (kr, kl)\}$, då är E en händelse att man får kl minst en gång. Om $F = \{(kl, kl), (kl, kr)\}$, då är F en händelse att det första myntet ger kl.

Ex: Två tärningar kastas. Om $E = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, är E en händelse att summan av de två antal ögon är 4.

Ex: Livslängden av en glödlampa. Om $E = \{x : x > 10\}$, är E en händelse att lampan håller ut längre än 10 timmar.

Några händelser: Låt E och F vara händelser.

Komplementära händelsen E^c till E: E inträffar inte.

Unionhändelsen $E \cup F$: E eller F eller både inträffar.

Snitthändelsen $E \cap F = EF$: E och F inträffar samtidigt.

Om E och F är *disjunkta* händelser, kan de inte inträffa samtidigt, dvs. att $E \cap F = \emptyset$.

Några operationer: Låt E, F och G vara händelser.

$E \cup F = F \cup E$

$EF = FE$

$(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$

$(EF)G = E(FG)$

$(E \cup F)G = (EG) \cup (FG)$

$(EF) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$

DeMorgans lagar: Låt E_1, E_2, ..., E_n vara händelser. Då är

(1) $\left(\cup_{i=1}^n E_i \right)^c = \cap_{i=1}^n E_i^c$

(2) $\left(\cap_{i=1}^n E_i \right)^c = \cup_{i=1}^n E_i^c$

2.3 Axiomer

Axiomsystemet: Låt S vara ett utfallsrum och E_1, E_2, E_3, ... händelser i S. Sannolikheten $P(\cdot)$ skall uppfylla

A1: $0 \leq P(E) \leq 1$

A2: $P(S) = 1$

A3: Om E_1, E_2, E_3, ... är en oändlig följd av parvist disjunkta händelser ($E_iE_j = \emptyset$, $i \neq j$), då är

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ...) = P(E_1) + P(E_2) + ... = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

2.4 Några propositioner

Proposition 4.1: $P(E^c) = 1 - P(E)$

Proposition 4.2: Om $E \subset F$, då är $P(E) \leq P(F)$

Proposition 4.3: $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(EF)$

Ex.4a (inte med i 7 upplaga): Man kastar två symmetriska mynt. Utfallsrummet är $S = \{(kl, kl), (kl, kr), (kr, kl), (kr, kr)\}$. Låt E vara en händelse att den första tärningen ger kl och F en händelse att den andra tärninger ger kl. Räkna $P(E \cup F)$.

Preposition 4.4:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + ...$$
$$+(-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<...<i_r} P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_r}) + ... + (-1)^{k+1}P(E_{i_1}E_{i_2}...E_{i_k}).$$

2.5 Utfallsrum med utfall som är lika sannolika

Ex.5a: Man kastar två (välgjorda/symmetriska) tärningar. Hur stor är sannolikheten att summan av de två antal ögon är 7?

Ex.5c: Man har en grupp av 6 män och 9 kvinnor och man väljer en komitté av 5 personer bland dem. Hur stor är sannolikheten att det kommer att sitta 3 män och 2 kvinnor i komittén?

Ex.5i: Det finns n personer i rummet. Hur stor är sannolikheten att alla har olika födelsedagar? Hur stor måste n vara att sannolikheten är mindre än $\frac{1}{2}$?

Ex.5n: 10 par sitter vid ett runt bord. Vad är sannolikheten att ingen av fruarna sitter bredvid sin man?