# 3 Betingad sannolikhet och oberoende

### 3.2 Betingade sannolikheter

**Ex**: Man kastar två välgjorda tärningar. Den första tärningen ger en trea. Givet att första tärningen ger en trea, vad är sannolikheten att summan av de två antal ögon är 8?

**Definition**: Om $P(F) > 0$, då är

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)}$$

den *betingade sannolikheten* av $E$ givet $F$.

**Ex.2d** (inte i 7 upplaga): Fru Jones är bjuden på en fest, där alla inbjudna har minst en son. Fru Jones har två barn. Vad är sannolikheten att hon har två söner givet att hon är bjuden på festen?

**Ex.2f**: Det finns 8 röda bollar och 4 vita bollar i en urna. Man tar två av bollarna på måfå från urnan utan återläggning. Man antar att varenda gång är det lika sannolikt att välja vilken som helst av bollarna. Vad är sannolikheten att man tar två röda bollar?

**Multiplikationsregeln**:

$$P(E_1E_2...E_n) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_1E_2) \cdot ... \cdot P(E_n|E_1E_2...E_{n-1})$$

**Obs!** $P(E_1) > 0$, $P(E_1E_2) > 0$,..., $P(E_1E_2...E_{n-1}) > 0$

### 3.3 Bayes sats

**Totala sannolikhetslagen**: Anta att $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$ är parvist disjunkta händelser sådana att $\cup_{i=1}^n F_i = S$. Då är för händelse $E$

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)$$

givet att $P(F_i) > 0$ för varje $i$.

**Ex.3d**: Blodtestet kan avslöja en viss sjukdom med 95% sannolikhet om patienten har den. Med sannolikhet 0.01 ger testet ett positivt resultat om patienten inte har sjukdomen. Anta att 0.5% av befolkningen har sjukdomen. Vad är sannolikheten att en patient (vald på måfå) har sjukdomen givet att testresultatet är positivt?

**Proposition 3.1**: (Bayes sats) Låt $F_1$, $F_2$, ..., $F_n$ vara parvist disjunkta händelser och $\cup_{i=1}^n F_i = S$. Då är

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

**Ex.3i** (3j i 7 upplaga): Ett flygplan saknas. Man antar att det har gått ner på ett av tre möjliga områden med lika stor sannolikhet på varje. Låt $1 - \beta_i$ vara sannolikheten att flygplanet hittas på område $i$ när det är där, $i = 1, 2, 3$. Vad är den betingade sannolikheten att flygplanet är på område $i$ givet att man inte hittade det på område 1?

### 3.4 Oberoende händelser

**Definition**: Två händelser $E$ och $F$ är oberoende om

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

**Ex.4c**: Man kastar två (välgjorda) tärningar. Låt

$$E_1 = \{\text{summan av de två är 6}\}$$

och

$$F = \{\text{den första tärningen ger 4}\}.$$

Är $E_1$ och $F$ oberoende händelser?

**Proposition 4.1**: Om $E$ och $F$ är oberoende händelser, så är $E$ och $F^c$.

**Ex. 4e**: Man kastar två (välgjorda) tärningar. Låt

$$E = \{\text{summan av de två är 7}\},$$

$$F = \{\text{den första tärningen ger 4}\}.$$

och

$$G = \{\text{den andra tärningen ger 3}\}.$$

Är $E$ och $FG$ oberoende?

**Definition**: Tre händelser $E$, $F$ och $G$ är oberoende om $P(EFG) = P(E)P(F)P(G)$, $P(EF) = P(E)P(F)$, $P(EG) = P(E)P(G)$ och $P(FG) = P(F)P(G)$.

### 3.5 $P(\cdot|F)$ är en sannolikhet

**Proposition 5.1**: $P(\cdot|F)$ är en sannolikhet:

a) $0 \leq P(E|F) \leq 1$ för varje händelse $E$

b) $P(S|F) = 1$

c) Om $E_i$, $i = 1, 2, ...$ är parvist disjunkta händelser, då är

$$P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i|F) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i|F).$$

**Ex. 3a och 5a**: Ett försäkringsbolag tycker att man kan dela människorna i två grupper: de som hamnar lätt i olyckor (olyckabenägna) och de som inte gör det. Deras statistik visar att en person som är olyckabenägen, kommer att hamna i en olycka någon gång under en fixerad ett års period med sannolikhet 0.4. En person, som inte är olyckabenägen, har motsvarande sannolikhet 0.2.

a) (Ex. 3a) Om man antar att 30% av befolkningen är olyckabenägna, vad är sannolikheten att en ny kund kommer att hamna i en olycka inom ett år?

b) (Ex. 5a) Vad är den betingade sannolikheten att en ny kund hamnar i en olycka under sitt andra försäkringsår givet att kunden har haft en olycka under sitt första år?

**Obs!** Om vi vet kundernas status (olyckabenägen eller inte), då är händelserna "olycka under första året" och "olycka under andra året' oberoende (*betingad oberoende*).

**Definition**: Händelserna $E_1$ och $E_2$ är *betingad oberoende* givet $F$ om

$$P(E_1|E_2F) = P(E_1|F)$$

och

$$P(E_1E_2|F) = P(E_1|F)P(E_2|F).$$