8. Gränsvärdessatser

8.2 Chebyshevs olikhet och den svaga stora talens lag

Proposition 2.1 (Markovs olikhet): Om X är en stokastisk variabel som antar bara ickenegativa värden, är för vilken $a > 0$ som helst

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

Proposition 2.2 (Chebyshevs olikhet): Om X är en stokastisk variabel med väntevärdet $\mu < \infty$ och variansen $\sigma^2 < \infty$, då är för vilken $k > 0$ som helst

$$P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}.$$

Ex.2a: Anta att antalet produkter som tillverkas av en fabrik under en vecka är en stokastisk variabel med väntevärdet 50.

a) Vad kan man säga om sannolikheten att antalet produkter som tillverkas denna vecka kommer att bli större än 75?

b) Anta att variansen av antalet produkter är 25. Vad kan man säga om sannolikheten att antalet produkter som tillverkas denna vecka kommer att bli mellan 40 och 60?

Sats 2.1 (den svaga stora talens lag): Låt X_1, X_2,... vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med $\mathbf{E}[X_i] = \mu < \infty$, $i = 1, 2....$ Då är för vilken som helst $\epsilon > 0$

$$P\left(|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mu| \geq \epsilon\right) \to 0$$

då $n \to \infty$.

8.3 Centrala gränsvärdessatsen

Sats 3.1 (centrala gränsvärdessatsen): Låt X_1, X_2,... vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med $\mathbf{E}[X_i] = \mu$ och $Var(X_i) = \sigma^2$, $i = 1, 2, ...$ Då konvergerar fördelningen av

$$\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

till $N(0, 1)$ då $n \to \infty$. Dvs. att för $-\infty < a < \infty$ och då $n \to \infty$

$$P\left(\frac{X_1 + ... + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq a\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2}\, dx = \Phi(a).$$

Lemma 3.1: Låt Z_1, Z_2,... vara en följd av stokastiska variabler som har fördelningsfunktioner F_{Z_n} och momentgenererande funktioner M_{Z_n}, $n \geq 1$. Låt Z vara en stokastisk variabel med fördelningsfunktionen F_Z och momentgenererande funktionen M_Z. Om $M_{Z_n}(t) \to M_Z(t)$ för varje t, då $F_{Z_n}(t) \to F_Z(t)$ för varje t, där $F_Z(t)$ är kontinuerlig.

Ex: Låt X_1,..., X_{20} vara oberoende stokastiska variabler från $Lik(0,1)$ och $S = \sum_{k=1}^{20} X_k$. Approximativt fördelning för S?

Ex.3a: En astronom vill mäta (i ljusår) avståndet mellan sitt observatorium och en viss stjärna. Han vet att varje gång han mäter avståndet får han inte avståndet exakt men en skattning för det. Därför mäter astronomen avståndet många gånger och använder medelvärdet av sina mätningar som en definiv skattning för avståndet. Han antar att värden av mätningarna är oberoende och likafördelade stokastiska variabler, som har väntevärdet d (det riktiga avståndet i ljusår) och variansen 4. Hur många mätningar behöver han för att hans skattning skulle vara inom ± 0.5 ljusår från det riktiga avståndet d.

Ex.3b: Antal studenter som läser en viss kurs är en $Poisson(100)$-fördelad stokastisk variabel. Läraren som har kursen har bestämt sig att ha en grupp om antalet studenter är mindre eller lika med 120 och två grupper om antalet är större än 120. Hur stor är sannolikheten att två grupper behövs?

Ett specialfall: DeMoivre-Laplace gränsvärdessats (Kapitel 5.4.1 Normalapproximation för binomialfördelningen)
Om S_n är antalet succéer, när n oberoende försök med succésannolikheten p, utförs, då för vilka $a < b$ som helst är

$$P\left(a \leq \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \Phi(b) - \Phi(a)$$

då $n \to \infty$. Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

Ex.4f: Låt X vara antalet klaver när man singlar en (symmetrisk) slant 40 gånger. Då är $X \sim Bin(40, 0.5)$. Approximera sannolikheten att $X = 20$.

Sats 3.2 (centrala gränsvärdessatsen för oberoende stokastiska variabler): Låt X_1, X_2,... vara en följd av oberoende stokastiska variabler med resp. väntevärden $\mu_i = \mathbf{E}[X_i]$ och variansen $\sigma_i^2 = Var(X_i)$. Om $P(|X_i| < M) = 1$ för varje i och $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_1^2 = \infty$, då är

$$P\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2}} \leq a\right) \to \Phi(a)$$

då $n \to \infty$.

8.4 Starka stora talens lag

Sats 4.1 (starka stora talens lag): Låt X_1, X_2,... vara en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler med det gemensamma väntevärdet $\mu < \infty$. Då är med sannolikhet 1

$$\frac{X_1 + ... + X_n}{n} \to \mu$$

då $n \to \infty$.