9. Andra områden inom sannolikhetsteori

9.1 Poissonprocessen

Anta att en händelse (t.ex. jordbävning) inträffar vid slumpmässiga tidpunkter. Låt $N(t)$ vara antalet händelser som inträffar på tidsintervallet $[0, t]$. En samling av stokastiska variabler $\{N(t), t \geq 0\}$ är en Poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$, om

i) $N(0) = 0$ (processen börjar vid tid $t = 0$)

ii) Antalet händelser som inträffar på disjunkta tidsintervall är oberoende

iii) Fördelningen av antalet händelser på ett givet intervall beror bara på längden av intervallet, inte på var intervallet ligger (stationaritét)

iv) $P(N(h) = 1) = \lambda h + o(h)$, där en funktion f är $o(h)$, om $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$, dvs. att $f(h)$ är litet jämfört med h

v) $P(N(h) \geq 2) = o(h)$

Lemma 1.1: För en Poissonprocess med intensitet λ, är

$$P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Anta att man har en Poissonprocess. Låt T_1 vara tiden, då den första händelsen inträffar och för $n > 1$ låt T_n vara tiden som går mellan den $(n-1)$-te och n-te händelsen. Följden $\{T_n, n = 1, 2...\}$ kallas följden av *ankomsttider mellan händelserna*.

Proposition 1.1: T_1, T_2,... är oberoende och $Exp(\lambda)$-fördelade stokastiska variabler.

Ankomsttiden av den n-te händelsen (eller *väntetiden* tills den n-te händelsen) definieras

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i, \quad n \geq 1.$$

och $S_n \sim Gamma(n, \lambda)$

Sats 1.1: För en Poissonprocess med intensitet λ

$$P(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}.$$

Ex.7d(7e) (i Kap 4): Anta att antalet jordbävningar/vecka i Kalifornien följer en Poissonprocess med intensiteten 2. Hur stor är sannolikheten att det inträffar minst tre jordbävningar under de två nästa veckorna?

Ex: Anta att antalet människor/dag som flyttar till en stad följer en Poissonprocess med intensiteten 1.

a) Vad är den förväntade tiden tills den 10-de personen flyttar till staden?

b) Vad är sannolikheten att tiden mellan den 10-de och den 11-te personen är längre än två dagar?

Ex: Antalet bilar/minut som passerar en viss punkt på en motorväg följer en Poissonprocess med intensiteten 3. Om man springer blint över vägen, vad är sannolikheten att man är oskadad om det tar s sekunder att springa över? (Anta att om man är någonstans mitt på vägen när en bil kommer blir man skadad.) Beräkna sannolikheten med $s = 2, 5, 20$

9.2 Markovkedjor

Låt X_0, X_1,... vara en följd av stokastiska variabler, som kan anta värdena 0,1,...,M. Man säger att X_n är *tillståndet* av ett system vid tid n och att systemet är i tillstånd i vid tid n, om $X_n = i$.

Följden av stokastiska variabler bildar en *Markovkedja* om varje gång när systemet är i tillstånd i, finns det en fixt sannolikhet P_{ij} att systemet kommer att vara i tillstånd j näst. Dvs. att för alla $i_0, ..., i_{n-1}, i, j$

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_0 = i_0) = P_{ij}.$$

Värdena P_{ij}, $0 \leq i \leq M$, $0 \leq j \leq M$, kallas *övergångssannolikheterna* av Markovkedjan.

Den simultana frekvensfunktionen av X_0,...,X_n är

$$P(X_n = i_n, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P_{i_{n-1},i_n} \cdot P_{i_{n-2},i_{n-1}} \cdot ... \cdot P_{i_1,i_2} P_{i_0.i_1} P(X_0 = i_0).$$

Ex.2a: Anta att vädret (regnar/inte regnar) i morgon beror bara på vädret i dag: Om det regnar i dag, regnar det i morgon med sannolikhet α och om det inte regnar i dag, regnar det i morgon med sannolikhet β. Beskriva vädersystemet som en Markovkedja.

Ex.2c: Anta att det finns M molekyler i två urnor. Vid varje tidpunkt dras en av molekylerna på måfå och flyttas från sin dåvarande urna till den andra urnan. Låt X_n vara antalet molekyler i den första urnan just efter det n-te flyttet. Beskriva systemet som en Markovkedja.

Proposition 2.1 (Chapman-Kolmogorovs likheter):

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} P_{ik}^{(r)} P_{kj}^{(n-r)} \text{ för alla } 0 < r < n,$$

där $P_{ij}^{(n)}$ är sannolikheten att systemet är i tillstånd i och kommer att vara i tillstånd j efter två steg.

Ex.2d: Slumpvandring: En partikel rör sig på x-axeln. Vid varje tidpunkt tar partikeln ett steg till höger med sannolikhet p och ett steg till vänster med sannolikhet $1-p$. Dvs. att partikelns väg följer en Markovkedja som har övergångssannolikheterna

$$P_{i,i+1} = p \text{ och } P_{i,i-1} = 1-p, i = 0, \pm 1, ...$$

Beräkna $P_{ij}^{(n)}$.

Ofta konvergerar $P_{ij}^{(n)}$, då $n \to \infty$, till ett värde Π_j, som beror bara på j (tillståndet man hoppar i). Dvs. att för stora värden av n är sannolikheten att systemet är i tillstånd j efter n steg approximativt Π_j oberoende av var man startade. Ovan gäller om (men inte endast om) för någon $n > 0$, $P_{ij}^{(n)} > 0$ för alla $i, j = 0, 1, ..., M$. Man säger att en sådan Markovkedja är *ergodisk*.

Sats 2.1: För en ergodisk Markovkedja existerar

$$\Pi_j = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^{(n)},$$

där Π_j-er, $0 \le j \le M$, är de unika ickenegativa lösningar av

$$\Pi_j = \sum_{k=0}^{M} \Pi_k P_{kj} \text{ och } \sum_{j=0}^{M} \Pi_j = 1.$$

Ex.2e (**Ex.2a** fortsätter): Beräkna gränsvärdena av sannolikheterna.

Ex.2f (**Ex.2c** fortsätter): Beräkna proportionen av tiden då det finns j molekyler i den första urnan, $j = 0, 1, ..., M$.