TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2004-08-14 kl 8.45-13.45.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42
Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

1) Låt X vara en Poissonfördelad stokastisk variabel med parameter λ. Beräkna väntevärdet av X genom att använda

   a) definitionen av väntevärdet. (1.5p)

   b) momentgenererande funktionen av Poissonfördelningen. (1.5p)

2) Anta att X är en normalfördelad stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2. Bevisa att $\alpha X + \beta$ är normalfördelad med väntevärde $\alpha\mu + \beta$ och varians $\alpha^2\sigma^2$. Det räcker att titta på fallet $\alpha > 0$. (3p)

3) Ge definitionen av oberoendet av två händelser. Bevisa att om händelser A och B är oberoende då är också A och B^c oberoende. (3p)

4) Tre män har bestämt sig för att träffa varandra på Grandhotellet. De vet inte att det finns fyra hotel i stan med samma namn. Var och en av männen går till ett av hotellen på måfå och oberoende av varandra. Hur stor är sannolikheten att

   a) alla tre är på olika hotel? (1.5p)

   b) alla är på samma hotel? (1.5p)

5) Man har fem bollar och kastar en symmetrisk mynt för att bestämma färgen av var och en av bollarna. Om man får en krona, målas bollen vit och om man får en klave, målas bollen röd. De målade bollarna stoppas in i en låda. Sedan drar man en boll 5 gånger ut ur lådan med återläggning. Bollen är vit varje gång. Vad är då (givet att bollen är vit varje gång) sannolikheten att alla fem bollar är vita? (3p)

6) Stokastiska variabler X och Y har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2e^{-2x}}{x}, & 0 \le x < \infty, 0 \le y \le x \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

   Beräkna $\mathrm{Cov}(X,Y)$. (3p)

Vänd!

7) Man tror att en supernova exploderar genomsnittligt en gång/300 år. Anta att explosionerna bildar en Poissonprocess. Beräkna sannolikheten att

   a) det exploderar minst två supernovor under en viss 60 års tidsperiod. (1.5p)

   b) det exploderar inga supernovor under en viss 450 års tidsperiod. (1.5p)

8) Det finns tre kameror i en affär. Funktionstiderna av kameror är oberoende och exponentialfördelade stokastiska variabler med parameter λ.

   a) Vad är sannolikheten att alla tre kameror fungerar efter tiden t? (1.5p)

   b) Låt N vara antalet kameror som fungerar vid tid t. Vad är fördelningen av N? (1.5p)

9) En person åker först med buss 1 och sedan med buss 2. Väntetiderna X (buss 1) och Y (buss 2) är oberoende och likformigt fördelade över intervallen (0,10) resp (0,8), där enheten är minuter. Bestäm sannolikheten att personen får vänta sammanlagt minst 16 minuter på de båda bussarna. (3p)

10) Anta att den dagliga variationen av priset av en aktie är en stokastisk variabel med väntevärde 0 och varians σ^2. Låt Y_0 vara priset av aktien idag och låt Y_n representera priset av aktien n dagar senare. Då är

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad n \geq 1,$$

där X_1, X_2,... är oberoende och likfördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians σ^2. Anta att priset av aktien idag, Y_0, är 100. Om $\sigma^2 = 1$, vad är den approximativa sannolikheten att priset är högre än 107 om 50 dagar? (3p)

Lycka till!