TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2001-8-29.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42
Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

1) Låt X vara en binomialfördelad stokastisk variabel med parametrar n och p. Beräkna väntevärdet och variansen av X. (3p)

2) Låt X_1 och X_2 vara oberoende stokastiska variabler sådana att $P\{X_1 = 0\} = P\{X_1 = 1\} = P\{X_2 = 0\} = P\{X_2 = 1\} = \frac{1}{2}$. Låt X_3 vara en stokastisk variabel så att $X_3 = 1$ om $X_1 = X_2$ och $X_3 = 0$ annars.

   a) Är X_2 och X_3 oberoende? (1.5p)

   b) Är X_1, X_2 och X_3 oberoende? (1.5p)

3) Formulera och bevisa den svaga formen av Stora Talens Lag. Du kan anta att de stokastiska variablerna har ändlig varians σ^2. (3p)

   Anmärkning: Alla resultat som behövs vid beviset kan användas utan bevis.

4) Tre män har bestämt sig för att träffa varandra på Grandhotellet. De vet inte att det finns fyra hotel i stan med samma namn. Var och en av männen går till ett av hotellen på måfå och oberoende av varandra. Hur stor är sannolikheten att

   a) alla tre är på olika hotel? (1.5p)

   b) alla är på samma hotel? (1.5p)

5) Anta att 1% av populationen är knarkare. Vi tar en person från populationen på måfå och vill veta om han/hon är knarkare eller inte. Testet man kan använda ger ett rätt svar med sannolikhet 0.99 oavsett man är knarkare eller inte. Anta att testet säger att den valda personen är knarkare. Hur stor är då sannolikheten att han/hon faktiskt är knarkare (givet att testet säger att han/hon är knarkare)? (3p)

6) a) På hur många olika sätt kan elva personer placeras vid ett runt bord (två placeringsordningar antas vara samma om de kan fås från varandra genom att rotera bordet)? (1p)

   b) Anta att de elva personerna representerar olika länder. Hur stor är sannolikheten att engelsmannen och fransmannen sitter brevid varandra om placeringen är helt slumpmässigt? (2p)

7) En fabrik tillverkar kuvert. Vi antar att vikten X av ett kuvert är normalfördelad med väntevärde 1.95 och varians 0.05^2 (enheten är gram).

   a) Hur stor är sannolikheten att vikten av ett kuvert tagits på måfå är mellan 1.8g och 2.1g? (1p)

   b) Hur stor är sannolikheten att vikten av ett kuvert tagits på måfå är mer än 2g? (1p)

   c) Beräkna väntevärdet av antalet kuvert, som väger mer än 2g, i ett paket av 100 kuvert. (1p)

8) Låt X och Y vara antalet erhållna "ettor" respektive "tvåor" vid två oberoende kast med en välgjord tärning. Bestäm kovariansen för X och Y. (3p)

   Anmärkning: $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.

9) Anta att antalet olyckor/dag på en viss väg är Poissonfördelat med parameter $\lambda = 3$.

   a) Hur stor är sannolikheten att 3 eller fler olyckor händer idag? (1p)

   b) Hur stor är sannolikheten att 3 eller fler olyckor händer idag givet att minst en olycka händer idag? (2p)

10) Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} c(2-x), & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

   a) Bestäm c. (1p)

   b) Bestäm fördelningsfunktionen för X. (1p)

   c) Hur stor är sannolikheten att $0 < X \leq 1$? (1p)

Lycka till!