

TENTAMEN: Sannolikhetssteori 1, 10p. 2001-9-21.

Lärare och jour: Aila Särkkä

Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

- 1) Formulera och bevisa Bayes formel. (3p)
- 2) Låt X vara en stokastisk variabel med väntevärde μ och varians σ^2 och låt $Y = bX + a$, där a och b är konstanter.
 - a) Beräkna väntevärdet och variansen av Y . (1.5p)
 - b) Bestäm kovariansen och korrelationen mellan X och Y . (1.5p)
- 3) Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler. X är Poisson-fördelad med parameter λ_1 och Y är Poisson-fördelad med parameter λ_2 . Beräkna frekvensfunktionen (sannolikhetsfunktionen) för $X + Y$. (3p)
- 4) En person har 10 kompisar och han bjuder 5 av dem på en fest.
 - a) Hur många olika kombinationer av kompisar finns det om två av kompisarna vägrar att komma till samma fest? (1.5p)
 - b) Hur många olika kombinationer av kompisar finns det om två av kompisarna bara kommer tillsammans? (1.5p)
- 5) Låt X ha en likformig fördelning i $(0, 4)$. Bestäm täthetsfunktion och varians för \sqrt{X} . (3p)
- 6) Ett flygbolag vet att sannolikheten att en person, som har bokat en biljett, inte kommer till flyget är 0.05. Därför säljer bolaget 257 biljetter till flyget som kan ta 250 passagerare. Vad är sannolikheten att alla som kommer till flyget (och har bokat en biljett) får en plats? (3p)
- 7) När Herr K kastar pil är avståndet från träffen till medelpunkten av tavlan exponentialfördelat med väntevärde $\frac{1}{\lambda}$. Kastet är "bra", om avståndet är högst $\frac{1}{2\lambda}$. Herr K bestämmer sig att fortsätta kasta pil tills han får sitt första bra kast. Beräkna sannolikheten att han behöver mer än 5 kast. (3p)
- 8) Livslängden X av en komponent är normalfördelad med väntevärde 160 (dygn) och varians σ^2 . Man vill garantera att

$$P(120 < X < 200) \geq 0.80.$$

Hitta det största σ^2 sådan att olikheten ovan är sann. (3p)

9) Låt X vara en stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + c & 0 < x < \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Bestäm

- a) konstanten c , (1p)
 - b) $P(X < \frac{3}{4})$, (1p)
 - c) $E[X]$. (1p)
- 10) Anta att den dagliga variationen av priset av en aktie är en stokastisk variabel med väntevärde 0 och varians σ^2 . Låt Y_0 vara priset av aktien idag och låt Y_n representera priset av aktien n dagar senare. Då är

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n, \quad n \geq 1,$$

där X_1, X_2, \dots är oberoende och likfördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians σ^2 . Anta att priset av aktien idag, Y_0 , är 100. Om $\sigma^2 = 1$, vad är den approximativa sannolikheten att priset är högre än 107 om 50 dagar? (3p)

Lycka till!