TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2003-12-20.

Kortfattade lösningar:

1) a) Se boken (Kapitel 3.4, s. 83).

   b) Händelserna $\{X = 0\}$ och $\{Z = 3\}$ är oberoende om $P(X = 0, Z = 3) = P(X = 0)P(Z = 3)$. Nu är $P(X = 0) = p$, $P(Z = 3) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) = 2p(1-p)$, och $P(X = 0, Z = 3) = P(X = 0, Y = 1) = P(X = 0)P(Y = 1) = p(1-p)$. Vi får att $p(1-p) = p \cdot 2p(1-p)$, vilket ger att händelserna $\{X = 0\}$ och $\{Z = 3\}$ är oberoende om $p = 0$, 0.5 eller 1.

2) Se boken (Kapitel 4.4, Proposition 4.1, s. 134).

3) Se boken (Kapitel 6.3, Ex. 3e, s. 267). Man kan också använda momentgenererande funktioner.

4) Låt $X \sim Exp(0.1)$ och $Y \sim Exp(b)$, $b < 0.1$. Då är $P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 0.1e^{-0.1x}\,dx = e^{-1}$ och $P(Y > 10) = e^{-10b}$. Nu måste $e^{-10b} \geq 1.1e^{-1}$. Vi får att $b \leq 0.0905$.

5) a) $\frac{9 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{5}$

   b) $\frac{2(3+4+5+2\cdot 6)8!}{10!} = \frac{8}{15}$

6) Låt $A = \{$två råa efter att ha ätit fem$\}$. Då är $P(\text{påse } 2|A) = P(\text{påse } 2, A)/P(A) = P(A|\text{påse } 2)P(\text{påse } 2)/(P(A|\text{påse } 1)P(\text{påse } 1) + P(A|\text{påse } 2)P(\text{påse } 2))$ (Bayes sats). Nu är $P(A|\text{påse } 1) = \binom{3}{2}\binom{7}{3}/\binom{10}{5} = \frac{5}{12}$ och $P(A|\text{påse } 2) = \binom{7}{2}\binom{3}{3}/\binom{10}{5} = \frac{1}{12}$ och vi får att $P(\text{påse } 2|A) = \frac{1}{6}$.

7) a) Låt $A = \{$restiden av spårvagnen (Mia)$\}$ och $B = \{$restiden av bussen (Kalle)$\}$. Vi vill räkna $P(|A - B| < 10)$. Nu är $A - B \sim N(30 - 20, 36 + 64) = N(10, 100)$ och då är $P(|A - B| < 10) = P(-10 < A - B < 10) = P(-2 < (A - B - 10)/10 < 0) = P(-2 < Z < 0) = \Phi(0) - \Phi(-2) = 0.5 - 1 + \Phi(2) = 0.9772 - 0.5 = 0.4772$, där $Z \sim N(0, 1)$.

   b) $P(A < B) = P(A - B < 0) = P((A - B - 10)/10 < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$.

8) $X \sim Exp(1)$ och $Y \sim Exp(1)$. Då är $\mathbf{E}[X] = Var(X) = \mathbf{E}[Y] = Var(Y) = 1$ och $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X+Y] = \mathbf{E}[X]+\mathbf{E}[Y] = 2$ och sedan X och Y är oberoende, är $Var(Z) = Var(X+Y) = Var(X)+Var(Y) = 2$. Kovariansen mellan X och Z är $\mathbf{E}[XZ]-\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X(X+Y)]-\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X^2]+\mathbf{E}[XY]-\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Z] = Var(X)+(\mathbf{E}[X])^2+\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]-\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Z] = 1$. Korrelationen mellan X och Z är $Cov(X,Z)/\sqrt{Var(X)Var(Z)} = 1/\sqrt{1 \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

9) a) Låt X vara antalet dagar tills fången är i frihet. Då är $\mathbf{E}[X] = 0.5(2+\mathbf{E}[X]) + 0.3(3+\mathbf{E}[X]) + 0.2 \cdot 0 = 1.9 + 0.8\mathbf{E}[X]$. Då är $\mathbf{E}[X] = 9.5$.

b) Nu är $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{3}(2+\frac{1}{2}(3+0)+\frac{1}{2}\cdot 0)+\frac{1}{3}(3+\frac{1}{2}(2+0)+\frac{1}{2}\cdot 0)+\frac{1}{3}\cdot 0 = 2.5$.

10) Låt X_i vara livslängden av den $i$te komponenten och n det sökta antalet komponenter. Vi hittar n genom att lösa olikheten $P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 8a) \leq 0.025$. Nu är $P(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 8a) = P((\sum_{i=1}^{n} X_i - na)/a\sqrt{n} \leq (8a-na)/a\sqrt{n}) \approx P(Z \leq (8-n)/\sqrt{n}) = \Phi((8-n)/\sqrt{n}) \leq 0.025$. Vi får att $1 - \Phi((8-n)/\sqrt{n}) \geq 1 - 0.025 = 0.975$ och då är $\Phi(-(8-n)/\sqrt{n}) \geq 0.975$ och $(n-8)/\sqrt{n} \geq 0.975$. Vi får att $n \geq 15.8$ och då kan vi säga att man behöver minst 16 komponenter.