TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2004-08-14.

Kortfattade lösningar:

1) a) Se boken (Kapitel 4.8, s. 151).

   b) Momentgenererande funktionen av Poissonfördelningen (med parameter λ) är $\exp(\lambda(e^t - 1))$. $M'_X(t) = \lambda e^t \exp(\lambda(e^t - 1))$ och $\mathbf{E}[X] = M'_X(0) = \lambda$.

2) Se boken (Kapitel 5.4, s. 201-202)

3) Se boken (Kapitel 3.4, s. 83-85).

4) a) $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{4^3} = \frac{3}{8}$

   b) $\frac{4\cdot 1\cdot 1}{4^3} = \frac{1}{16}$

5) Låt X vara antalet vita bollar i lådan, $X \sim Bin(5, \frac{1}{2})$, och låt Y vara antalet gånger som en vit boll dras. Då är

$$\begin{aligned} P(X=5|Y=5) &= \frac{P(Y=5|X=5)P(X=5)}{P(Y=5)} = \frac{P(Y=5|X=5)P(X=5)}{\sum_{i=0}^{5} P(Y=5|X=i)P(X=i)} \\ &= \frac{1\cdot(\frac{1}{2})^5}{\sum_{i=0}^{5}(\frac{i}{5})^5 \binom{5}{i} (\frac{1}{2})^5} = 0.284. \end{aligned}$$

6) $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \int_0^x x f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{2}$,
$\mathbf{E}[Y] = \int_0^\infty \int_0^x y f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x \frac{y}{x}\cdot 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{4}$,
$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^x xy f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x y\cdot 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{4}$
och då är $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{8}$.

7) Låt $X(t)$ vara antalet explosioner i $(0,t)$, $X(t) \sim Poisson(t)$ (enheten 300 år).

   a) $X(60) \sim Poisson(\frac{1}{5})$ och $P(X(60) \geq 2) = 1 - P(X(60) \leq 1) = 1 - P(X(60)=0) - P(X(60)=1) = 1 - \exp(-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{5}) = 0.0175$.

   b) $X(450) \sim Poisson(\frac{3}{2})$ och $P(X(450)=0) = \exp(-\frac{3}{2}) = 0.223$.

8) Låt X_i vara funktionstiden av kamera i, $X_i \sim Exp(\lambda)$.

a) $P(X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)PX_3 > t) = (P(X_1 > t))^3 = (\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,dx)^3 = e^{-3\lambda t}$.

b) $P(X_i > t) = e^{-\lambda t}$ och då är $N \sim Bin(3, e^{-\lambda t})$

9) $P(X + Y \geq 16) = P(Y \geq 16 - X) = \int_8^{10} \int_{16-x}^{8} \frac{1}{10\cdot 8}\,dydx = \frac{1}{40}$.

10) $Y_0 = 100$, $\sigma^2 = 1$. $Y_{50} = Y_{49} + X_{50} = ... = Y_0 + \sum_{i=1}^{50} X_i$. Centrala gränsvärdessatsen ger att

$$\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\mathbf{E}[X_i]}{\sqrt{50\mathrm{Var}(X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{\sqrt{50}}$$

är approximativt $N(0,1)$-fördelat. Då är $P(Y_{50} > 107) = P(\sum_{i=1}^{50} X_i > 7) = P(\sum_{i=1}^{50} X_i/\sqrt{50} > 7/\sqrt{50}) \approx P(Z > 0.99) = 1 - \Phi(0.99) = 0.1611$, där $Z \sim N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfrdelningen.