TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2004-1-19.

Kortfattade lösningar:

1) a) Se boken (Kapitel 2.4, s. 32)

   b) Se boken (Kapitel 2.4, s. 34)

2) Se boken (Kapitel 4.6, s. 144)

3) Se boken (Kapitel 3.3, s. 77)

4) a) $2 \cdot 9!$.

   b) $\frac{1\cdot2\cdot(2\cdot7+7\cdot6)\cdot7!}{10!} = \frac{7}{45} = 0.156$.

5) Låt X vara antalet oanvända bollar efter den första matchen. Då kan X anta värdena 6, 7, 8 och 9 med respektiva sannolikheter $\binom{9}{3}/\binom{15}{3}$, $\binom{9}{2}\binom{6}{1}/\binom{15}{3}$, $\binom{9}{1}\binom{6}{2}/\binom{15}{3}$ och $\binom{6}{3}/\binom{15}{3}$. Låt Y vara antalet oanvända bollar valda för den andra matchen. Då är $P(Y=3) = \sum_{x=6}^{9}\left(\binom{x}{3}/\binom{15}{3}\right)P(X=x) = 0.089$.

6) $\mathbf{E}[X] = \int_0^\infty \int_0^x xf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{2}$,
$\mathbf{E}[Y] = \int_0^\infty \int_0^x yf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x \frac{y}{x}\cdot 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{4}$,
$\mathbf{E}[XY] = \int_0^\infty \int_0^x xyf(x,y)\,dy\,dx = \int_0^\infty \int_0^x y\cdot 2e^{-2x}\,dy\,dx = \frac{1}{4}$
och då är $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[XY] - \mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] = \frac{1}{8}$.

7) $X \sim Exp(\frac{1}{10})$.

   a) $P(X > 15) = \int_{15}^\infty \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}} = e^{-\frac{3}{2}} = 0.223$.

   b) $P(X > 30|X > 15) = P(X > 30 - 15) = P(X > 15) = 0.223$.

8) Låt μ vara väntevärdet och σ^2 variansen av X. $P(X \le 0) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le -\frac{\mu}{\sigma}) = \Phi(-\frac{\mu}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{\mu}{\sigma}) = 0.1587$. Då är $\Phi(\frac{\mu}{\sigma}) = 1 - 0.1587 = 0.8413$ och $\frac{\mu}{\sigma} = 1$. $P(X \le 3) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{3-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{3-\mu}{\sigma}) = 0.6915$ och då är $\frac{3-\mu}{\sigma} = 0.5$. ($\Phi$ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.) Genom att lösa paret av de två ekvationerna får man att $\mu = 2$ och $\sigma^2 = 4$ ($\sigma = 2$).

9) Låt N vara antalet kast tills man får sexan för första gången, $N \sim Geom(\frac{1}{6})$. Låt X_i vara antalet ögon på kast i och X antalet ögon före den första sexan. Då är $X = \sum_{i=1}^{N-1} X_i$. Väntevärdet av X kan räknas $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|N]]$. Nu är $\mathbf{E}[X|N=n] = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{n-1} X_i] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}[X_i] = (n-1) \cdot \frac{1}{5} \cdot (1+2+3+4+5) = 3(n-1)$ och $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[3(N-1)] = 3(\mathbf{E}[N]-1) = 3(6-1) = 15$.

10) a) Låt Y vara antalet tryckfel/sida, $Y \sim Poisson(2)$. $P(Y < 2) = P(Y=0) + P(Y=1) = e^{-2}(1+2) = 3e^{-2} = 0.406$.

b) $X \sim Bin(500, 3e^{-2})$ och $\mathbf{E}[X] = 500 \cdot 3e^{-2} = 203$ och $\mathrm{Var}(X) = 500 \cdot 3e^{-2}(1-e^{-2}) = 120.582$. Då är $P(X > 215) = P(X \geq 215.5) = P(\frac{X-203}{\sqrt{120.582}} \geq \frac{215.5-203}{\sqrt{120.582}}) \approx P(Z \geq \frac{215.5-203}{\sqrt{120.582}}) = 1 - \Phi(1.14) = 0.127$, där $Z \sim N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.