TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2005-11-01

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 4.9, s. 167 (upplaga 6)/183 (upplaga 7))

2) Låt X vara antalet rätt valda koppar. Då är $X \sim HypGeom(5, 10, 5)$

   a) $P(X \geq 3) = \sum_{k=3}^{5} \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{5-k}}{\binom{10}{5}} = 0.5$

   b) $\mathbf{E}[X] = \frac{5 \cdot 5}{10} = 2.5$

3) Låt A_6 vara händelsen att brevet är i den 6-te lådan, och A_{1-5} händelsen att det är i någon av de fem första lådorna. Man vet att $P(A_{1-5} \cup A_6) = 0.5$. Då är

$$
\begin{aligned}
P(A_6 | A_{1-5}^c) &= \frac{P(A_6 \cap A_{1-5}^c)}{P(A_{1-5}^c)} \\
&= \frac{P(A_6)}{1 - P(A_{1-5})} = \frac{\frac{1}{12}}{1 - \frac{5}{12}} = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

4) a) Låt A vara händelsen att antingen Kajsa eller Lena väljs. Då är

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}\binom{8}{4} + \binom{8}{3}\binom{7}{4}}{\binom{8}{4}\binom{9}{4}} = \frac{1}{2}$$

   b) Låt B vara händelsen att både Kajsa och Lena väljs och de paras ihop.

   Då är $P(B) = \frac{\binom{7}{3}\binom{8}{3} \cdot 3!}{\binom{8}{4}\binom{9}{4} \cdot 4!}$

5) $X \sim N(500, 150^2)$. Man vet att $P(X \geq x_0) = 0.05$ och bör hitta x_0. Nu är $P(X \geq x_0) = P(Z \geq (x_0 - 500)/150) = 1 - P(Z \leq (x_0 - 500)/150) = 0.05$, där $Z \sim N(0, 1)$. Man får att $P(Z \leq (x_0 - 500)/150) = \Phi((x_0 - 500)/150) = 0.95$ och $x_0 = 747$, där Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

6) Låt X vara livslängden av en batteri. Batterin av typ i har fördelningen $Exp(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Låt A_i vara händelsen att batteriet är av typ i, $i = 1, 2$. Då är

$$
\begin{aligned}
& P(X > s+t|X > t) \\
& = P(X > s+t|X > t, A_1)P(A_1|X > t) + P(X > s+t|X > t, A_2)P(A_2|X > t) \\
& = P(X > s|A_1)P(A_1|X > t) + P(X > s|A_2)P(A_2|X > t).
\end{aligned}
$$

Nu är $P(X > s|A_i) = \int_s^\infty \lambda_i \exp(-\lambda_i x)\, dx = \exp(-\lambda_i s)$, och

$$
\begin{aligned}
P(A_i|X > t) &= \frac{P(X_i > t|A_i)P(A_i)}{P(X > t)} = \frac{P(X_i > t|A_i)P(A_i)}{P(X > t|A_1)P(A_1) + P(X > t|A_2)P(A_2)} \\
&= \frac{p_i \exp(-\lambda_i t)}{p_1 \exp(-\lambda_1 t) + p_2 \exp(-\lambda_2 t)}.
\end{aligned}
$$

Då är

$$
P(X > s+t|X > t) = \frac{p_1 \exp(-\lambda_1 (t+s)) + p_2 \exp(-\lambda_2 (t+s))}{p_1 \exp(-\lambda_1 t) + p_2 \exp(-\lambda_2 t)}
$$