TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2005-12-19

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 2.4, s. 32-34

2) a) $1 \cdot 8 \cdot 9!$

   b) $2{\cdot}9{\cdot}9!$ (amerikanaren sitter i kanten) $+8{\cdot}9{\cdot}9!$ (amerikanaren sitter i mitten) $=$ $9 \cdot 10!$.q

3) Låt X vara antalet oanvända bollar efter den första matchen. Då kan X anta värdena 6, 7, 8 och 9 med respektiva sannolikheter $\binom{9}{3}/\binom{15}{3}$, $\binom{9}{2}\binom{6}{1}/\binom{15}{3}$, $\binom{9}{1}\binom{6}{2}/\binom{15}{3}$ och $\binom{6}{3}/\binom{15}{3}$. Låt Y vara antalet oanvända bollar valda för den andra matchen. Då är $P(Y=3) = \sum_{x=6}^{9}\left(\binom{x}{3}/\binom{15}{3}\right)P(X=x) = 0.089.$

4) $F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \le x) = P(X \le x^2) = \int_0^{x^2} \frac{1}{4}\,dt = \frac{1}{4}x^2,\ x \in (0,2)$. Då är $f_{\sqrt{X}}(x) = \frac{1}{2}x$, om $x \in (0,2)$, och $f_{\sqrt{X}}(x) = 0$ annars. $\mathrm{E}[\sqrt{X}] = \int_0^4 \sqrt{x} f_X(x)\,dx = \int_0^2 x f_{\sqrt{X}}(x)\,dx = \frac{4}{3}$. $\mathrm{E}[\sqrt{X}^2] = \mathrm{E}[X] = \int_0^4 x f_X(x)\,dx = 2$. Då är $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\sqrt{X}^2] - (\mathrm{E}[\sqrt{X}])^2 = \frac{2}{9}$.

5) Låt $X \sim Exp(0.1)$ och $Y \sim Exp(b)$, $b < 0.1$. Då är $P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 0.1e^{-0.1x}\,dx = e^{-1}$ och $P(Y > 10) = e^{-10b}$. Nu måste $e^{-10b} \ge 1.1e^{-1}$. Vi får att $b \le 0.0905$.

6) $N = nk$. $P(\text{“neg. resultat i en grupp”}) = P(\text{“alla friska”}) = (1-p)^k$ och $P(\text{“pos. resultat i en grupp”}) = 1-(1-p)^k$. Låt X vara antalet undersökningar som behövs ($X \in \{n, n+k, n+2k, ..., n+nk\}$) och Y antalet positiva resultat efter gruppundersökningarna. $Y \sim Bin(n, 1-(1-p)^k)$ och $X = n + kY$. Man har att $\mathbf{E}[X] = n + k\mathbf{E}[Y] = n + kn(1-(1-p)^k) = \frac{N}{k} + N(1-(1-p)^k)$. Om $N = 100$, $k = 20$ och $p = 0.05$, är $\mathbf{E}[X] = 69$. Det är värt att använda den här metoden ($\mathbf{E}[X] = 69 < 100$).