

TENTAMEN: Sannolikhetssteori 1, del 1. 2004-12-18.

Kortfattade lösningar:

- 1) Se boken (Kapitel 4.9, s. 167)
- 2) Låt A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, vara händelser att paraplyet är i affär i och B händelsen att mannen har glömt paraplyet. Då är

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Nu är $P(A_i) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $P(A_i \cap B) = \left(\frac{3}{4}\right)^{i-1} \frac{1}{4}$ och
 $P(B) = \sum_{i=1}^4 P(A_i \cap B) = 0.684$. Då får man att $P(A_1|B) = 0.366$, $P(A_2|B) = 0.274$, $P(A_3|B) = 0.206$ och $P(A_4|B) = 0.154$.

- 3) a) $\frac{20 \cdot 18 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 6}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13} = 0.091$
b) $\frac{10 \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{9}{6} \cdot 2^6}{\binom{20}{8}} = 0,4268$

- 4) Låt X vara antal varv som behövs.

- a) $P(N - 1 \text{ barn får samma resultat och ett får annat resultat})$
 $= N \cdot P(\text{barn 1 får "kr" och alla andra "kl" eller tvärtom})$
 $= 2N \cdot P(\text{barn 1 får "kr" och alla andra "kl"})$
 $= 2N \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1} = N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}.$
Då är $P(X = n) = (1 - N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1})^{n-1} \cdot N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, dvs.
att $X \sim \text{Geom}(N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1})$
- b) $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{N \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}} = \frac{2^{N-1}}{N} = \frac{2^9}{10} = 51.2$ då $N = 10$.

- 5) a) $X \sim N(34, 16)$ (enhet 1000 km). Då är
- $$\begin{aligned} P(X > 40|X > 30) &= P(X > 40)/P(X > 30) \\ &= P(Z > 1.5)/P(Z > -1) \\ &= (1 - \Phi(1.5))/\Phi(1) = 0.079, \end{aligned}$$
- där Φ är fördelningsfunktionen av $N(0, 1)$ -fördelningen och $Z \sim N(0, 1)$.
- b) $X \sim Exp(\frac{1}{34})$. Då är
- $$P(X > 40|X > 30) = P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{34} e^{-x/34} dx = 0.745.$$
- c) De två sannolikheterna är väldigt olika. Normalfördelningen verkar mer rimligt: det verkar inte vara lämpligt att anta att ett gammalt däck har lika stor sannolikhet att hålla ut ett visst antal kilometer till som ett nytt däck.