TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2005-01-10.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 4.6.1, s. 144-145)

2) Låt $A = \{$två råa efter att ha ätit fem$\}$. Då är $P(\text{påse } 2|A) = P(\text{påse } 2, A)/P(A) = P(A|\text{påse } 2)P(\text{påse } 2)/(P(A|\text{påse } 1)P(\text{påse } 1)+P(A|\text{påse } 2)P(\text{påse } 2))$ (Bayes sats). Nu är $P(A|\text{påse } 1) = \binom{3}{2}\binom{7}{3}/\binom{10}{5} = \frac{5}{12}$ och $P(A|\text{påse } 2) = \binom{7}{2}\binom{3}{3}/\binom{10}{5} = \frac{1}{12}$ och vi får att $P(\text{påse } 2|A) = \frac{1}{6}$.

3) a) $\frac{9 \cdot 2 \cdot 8!}{10!} = \frac{1}{5}$

   b) $\frac{2(3+4+5+2\cdot 6)8!}{10!} = \frac{8}{15}$

4) $F_{\sqrt{X}}(x) = P(\sqrt{X} \leq x) = P(X \leq x^2) = \int_0^{x^2} \frac{1}{4}\, dt = \frac{1}{4}x^2,\ x \in (0,2)$. Då är $f_{\sqrt{X}}(x) = \frac{1}{2}x$, om $x \in (0,2)$, och $f_{\sqrt{X}}(x) = 0$ annars. $\mathrm{E}[\sqrt{X}] = \int_0^4 \sqrt{x} f_X(x)\, dx = \int_0^2 x f_{\sqrt{X}}(x)\, dx = \frac{4}{3}$. $\mathrm{E}[\sqrt{X}^2] = \mathrm{E}[X] = \int_0^4 x f_X(x)\, dx = 2$. Då är $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[\sqrt{X}^2] - (\mathrm{E}[\sqrt{X}])^2 = \frac{2}{9}$.

5) $X \sim Exp(\frac{1}{10})$.

   a) $P(X > 15) = \int_{15}^{\infty} \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}} = e^{-\frac{3}{2}} = 0.223$.

   b) $P(X > 30 | X > 15) = P(X > 30 - 15) = P(X > 15) = 0.223$.