TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2005-04-02.

Kortfattade lösningar:

1) a) X_2 och X_3 är oberoende (kolla att $P(X_2 = i, X_3 = j) = P(X_2 = i)P(X_3 = j)$ för $i, j = 0, 1$.

   b) X_1, X_2 och X_3 är inte oberoende: $P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) = 0$ men $P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) = \frac{1}{8}$.

2) Låt X vara antalet personer som kommer till flyget, $X \sim Bin(257, 0.95)$. $P(X \leq 250) = 1 - P(X \geq 251) = 1 - \sum_{x=251}^{257} P(X = x) = 0.975$.

3) Låt X vara antalet oanvända bollar efter den första matchen. Då kan X anta värdena 6, 7, 8 och 9 med respektiva sannolikheter $\binom{9}{3} / \binom{15}{3}$, $\binom{9}{2}\binom{6}{1} / \binom{15}{3}$, $\binom{9}{1}\binom{6}{2} / \binom{15}{3}$ och $\binom{6}{3} / \binom{15}{3}$. Låt Y vara antalet oanvända bollar valda för den andra matchen. Då är $P(Y = 3) = \sum_{x=6}^{9} \left(\binom{x}{3} / \binom{15}{3} \right) P(X = x) = 0.089$.

4) Låt X vara antalet försök tills dörren öppnar.

   a) $P(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{n-k+1}{n-k+2} \cdot \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$.

   b) $P(X = k) = (\frac{n-1}{n})^{k-1} \cdot \frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{n})^{k-1} \cdot \frac{1}{n}$.

5) $X \sim N(160, \sigma^2)$.

   a) $P(120 < X < 200) = P(-\frac{40}{\sigma} < Z \leq \frac{40}{\sigma}) = \Phi(\frac{40}{\sigma}) - \Phi(-\frac{40}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{40}{\sigma}) - 1$ och $P(120 < X < 200) \geq 0.8$ om $\sigma \leq 31.25$ (Φ är fördelningsfunktionen av $N(0, 1)$-fördelningen och $Z \sim N(0, 1)$). Svaret är då $\sigma = 31.25$.

   b) Y är antalet komponenter som behövs att undersöka tills man hittar en som fortfarande fungerar. Då är $Y \sim Geom(p)$, där $p = P(X \geq 190) = P(\frac{X-160}{31.25} \geq 0.96) = 1 - \Phi(0.96) = 0.1685$ och $P(Y > 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - 0.1685 - (1 - 0.1685) \cdot 0.1685 = 0.69$.