TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2005-08-26.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 3.4, s. 84-85).

2) a) $1 \cdot 8 \cdot 9!$

   b) $2 \cdot 9 \cdot 9!$ (amerikanaren sitter i kanten) $+ 8 \cdot 9 \cdot 9!$ (amerikanaren sitter i mitten) $=$ $9 \cdot 10!$.

3) Låt $E =$ en person tagen på måfå är knarkare och $F =$ testet säger att en person tagen på måfå är knarkare. Då är $P(E) = 0.01$, $P(F|E) = P(F^c|E^c) = 0.99$ och $P(F^c|E) = P(F|E^c) = 1 - 0.99 = 0.01$. Vi får att

$$P(E|F) = \frac{P(F|E)P(E)}{P(F|E)P(E) + P(F|E^c)P(E^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.01}{0.99 \cdot 0.01 + 0.01 \cdot 0.09} = \frac{1}{2}.$$

4) Låt $X \sim Exp(0.1)$ och $Y \sim Exp(b)$, $b < 0.1$. Då är $P(X > 10) = \int_{10}^{\infty} 0.1e^{-0.1x}\,dx = e^{-1}$ och $P(Y > 10) = e^{-10b}$. Nu måste $e^{-10b} \geq 1.1e^{-1}$. Vi får att $b \leq 0.0905$.

5) $N = nk$. $P($"neg. resultat i en grupp"$) = P($"alla friska"$) = (1-p)^k$ och $P($"pos. resultat i en grupp"$) = 1 - (1-p)^k$. Låt X vara antalet undersökningar som behövs ($X \in \{n, n+k, n+2k, ..., n+nk\}$) och Y antalet positiva resultat efter gruppundersökningarna. $Y \sim Bin(n, 1-(1-p)^k)$ och $X = n + kY$. Man har att $\mathbf{E}[X] = n + k\mathbf{E}[Y] = n + kn(1-(1-p)^k) = \frac{N}{k} + N(1-(1-p)^k)$. Om $N = 100$, $k = 20$ och $p = 0.05$, är $\mathbf{E}[X] = 69$. Det är värt att använda den här metoden ($\mathbf{E}[X] = 69 < 100$).