TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 1. 2004-11-04.

Kortfattade lösningar:

1) a) Se boken (Kapitel 4.7, s. 151)

b) $X \sim Exp(\frac{1}{70})$ är livslängden av en person och Y är antalet personer som lever längre än 90 år. $Y \sim Bin(20, p) \approx Poisson(20p)$-fördelalad, där $p = P(X > 90) = \int_{90}^{\infty} \frac{1}{70} exp(-x/70)\, dx = exp(-9/7) \approx 0.276$. Då är $P(Y < 3) = P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)$
$\approx exp(-20 \cdot 0.276)(1 + 20 * 0.276 + \frac{1}{2}(20 \cdot 0.276)^2) = 0.087$.

2) Låt A_i vara händelsen att i antal ögon inträffar inte och B händelsen att varje antal ögon inträffar minst en gång. Då är

$$P(B) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6) = 1 - \sum_i P(A_i) + \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} A_{i_2}) - \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) + \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4}) - \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4<i_5} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4} A_{i_5}) + \sum_{i_1<i_2<i_3<i_4<i_5<i_6} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3} A_{i_4} A_{i_5} A_{i_6}) = 1 - \binom{6}{1}(5/6)^{12} + \binom{6}{2}(4/6)^{12} - \binom{6}{3}(3/6)^{12} + \binom{6}{4}(2/6)^{12} - \binom{6}{5}(1/6)^{12} + 0 = 0.4378$$

3) Låt A_i vara händelsen att en observerad fågel är av art i, $i = 1, 2, 3$ och B en händelse att fågeln är ringmärkt. Nu är $P(A_1) = 0.45$, $P(A_2) = 0.38$, $P(A_3) = 0.17$, $P(B|A_1) = 0.10$, $P(B|A_2) = 0.15$ och $P(B|A_3) = 0.50$.

a) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} \cdot \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} =$
$0.24 + 0.30 = 0.54$

b) $P(A_3|B^C) = \frac{P(B^C|A_3)P(A_3)}{1-P(B)} = \frac{(1-P(B|A_3))P(A_3)}{1-\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = 0.105$

4) $N = nk$. $P($“neg. resultat i en grupp”$) = P($“alla friska”$) = (1-p)^k$ och $P($“pos. resultat i en grupp”$) = 1 - (1-p)^k$. Låt X vara antalet undersökningar som behövs ($X \in \{n, n+k, n+2k, ..., n+nk\}$) och Y antalet positiva resultat efter gruppundersökningarna. $Y \sim Bin(n, 1-(1-p)^k)$ och $X = n + kY$. Man har att $\mathbf{E}[X] = n + k\mathbf{E}[Y] = n + kn(1-(1-p)^k) = \frac{N}{k} + N(1-(1-p)^k)$. Om $N = 100$, $k = 20$ och $p = 0.05$, är $\mathbf{E}[X] = 69$. Det är värt att använda den här metoden ($\mathbf{E}[X] = 69 < 100$).

5) $X \sim N(160, \sigma^2)$.

a) $P(120 < X < 200) = P(-\frac{40}{\sigma} < Z \leq \frac{40}{\sigma}) = \Phi(\frac{40}{\sigma}) - \Phi(-\frac{40}{\sigma}) = 2\Phi(\frac{40}{\sigma}) - 1$ och $P(120 < X < 200) \geq 0.8$ om $\sigma \leq 31.25$ (Φ är fördelningsfunktionen av $N(0,1)$-fördelningen och $Z \sim N(0,1)$). Svaret är då $\sigma = 31.25$.

b) Y är antalet komponenter som behövs att undersöka tills man hittar en som fortfarande fungerar. Då är $Y \sim Geom(p)$, där $p = P(X \geq 190) = P(\frac{X-160}{31.25} \geq 0.96) = 1 - \Phi(0.96) = 0.1685$ och $P(Y > 2) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - 0.1685 - (1 - 0.1685) \cdot 0.1685 = 0.69$.