TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2005-12-19.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 7.3, s. 329-330)

2) Fördelningsfunktionen av X/Y är $F_{X/Y}(a) = P(X/Y \leq a) = P(X \leq aY) = \int_0^\infty \int_0^{ay} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dx\, dy = ... = a\lambda_1/(\lambda_2 + a\lambda_1)$, $a \geq 0$ och täthetsfunktionen av X/Y är $f_{X/Y}(a) = \lambda_1\lambda_2/(\lambda_2 + a\lambda_1)^2$, $a \geq 0$ (och $f_{X/Y}(a) = 0$ annars).

3) a) Låt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om figur } i \text{ är med} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är antalet figurer $X = \sum_{i=1}^{7} X_i$ och $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{7} P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^{7}(1 - P(X_i = 0)) = 7(1 - (\frac{6}{7})^1 0) = 5.5$

b) Geom$(\frac{2}{7})$

4) Priset efter 1000 dygn är $s \cdot u^X d^{1000-X} = s \cdot (\frac{u}{d})^X d^{1000}$, där X är antalet gånger priset går upp. Priset skall vara minst $1.3s$ och då är $s \cdot (\frac{u}{d})^X d^{1000} \geq 1.3s$ och man får att $X \geq (log(1.3) - 1000 log(d))/(log(u) - log(d)) = 469.2$. Nu är $X \sim Bin(1000, 0.52)$ och genom att använda centrala gränsvärdessatsen får man att $P(X \geq 469.2) = P(\frac{X-520}{\sqrt{520 \cdot 0.48}} \geq \frac{469.2-520}{\sqrt{520 \cdot 0.48}} \approx P(Z \geq -3.22) = \Phi(3.22) = 0.9994$, där $Z \sim N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

5) Låt Y vara antalet läkare på plats, $P(Y = y) = \frac{1}{3}$, $y = 2, 3, 4$. X är antalet patienter som tas emot totalt och X_i är antalet patienter som tas emot av en läkare i, $i = 1, ..., Y$, $X_i \sim Poisson(30)$. $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|Y]]$ och $\mathbf{E}[X|Y = y] = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{y} X_i] = \sum_{i=1}^{y} \mathbf{E}[X_i] = 30y$ och då är $\mathbf{E}[X] = 30\mathbf{E}[Y] = 90$. Variansen av X kan beräknas genom att använda formeln $Var(X) = \mathbf{E}[Var(X|Y)] + Var(\mathbf{E}[X|Y])$. $Var(X|Y = y) = \sum_{i=1}^{y} Var(X_i) = 30y$ och då är $Var(X|Y) = 30Y$. Man har att $Var(X) = \mathbf{E}[30Y] + Var(30Y) = 30\mathbf{E}[Y] + 900 Var(Y) = 690$ (därför att $Var(Y) = \frac{2}{3}$).

6) Antal patienter/timme, $N(1)$, är Poissonfördelat med parameter 7.

a) $N(2) \sim Poisson(14)$ och $P(N(2) = 12) = e^{-14}\frac{14^{12}}{12!}$

b) $P(N(17) - N(16) \geq 1, N(20) - N(18) \geq 1) = P(N(1) \geq 1)P(N(2) \geq 1) = (1 - e^{-7})(1 - e^{-14})$

c) Ankomsttiden av den tredje patienten, S_3, är Gamma(3,7)-fördelad. Då är $P(0.5 < S_3 < 1) = \int_{0.5}^{1} \frac{7^3}{2}x^2 e^{-7x}\, dx = ... = -\frac{65}{2}e^{-7} + \frac{85}{8}e^{-3.5} = 0.291$.