TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2005-01-10.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 6.3, s. 267, Ex. 3e).

2) $Y_0 = 100$, $\sigma^2 = 1$. $Y_{50} = Y_{49} + X_{50} = ... = Y_0 + \sum_{i=1}^{50} X_i$. Centrala gränsvärdessatsen ger att

$$\frac{\sum_{i=1}^{50} X_i - 50\mathbf{E}[X_i]}{\sqrt{50\mathrm{Var}(X_i)}} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{\sqrt{50}}$$

är approximativt $N(0,1)$-fördelat. Då är $P(Y_{50} > 107) = P(\sum_{i=1}^{50} X_i > 7) = P(\sum_{i=1}^{50} X_i/\sqrt{50} > 7/\sqrt{50}) \approx P(Z > 0.99) = 1 - \Phi(0.99) = 0.1611$, där $Z \sim N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

3) $Y_n = X_n + X_{n+1} + X_{n+2}$. Om $j = 0$, då är $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+j}) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_n) = \mathrm{Var}(Y_n) = \mathrm{Var}(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}) = \mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(X_{n+1}) + \mathrm{Var}(X_{n+2}) = 3\sigma^2$. Om $j = 1$, då är $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+j}) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1}) = \mathrm{Cov}(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) = \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) + \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+2}) + \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+3}) + \mathrm{Var}(X_{n+1}) + \mathrm{Cov}(X_{n+1}, X_{n+2}) + \mathrm{Cov}(X_{n+1}, X_{n+3}) + \mathrm{Cov}(X_{n+2}, X_{n+1}) + \mathrm{Var}(X_{n+2}) + \mathrm{Cov}(X_{n+2}, X_{n+3}) = \mathrm{Var}(X_{n+1}) + \mathrm{Var}(X_{n+2}) = 2\sigma^2$ (därför att $\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+j}) = 0$ för $j \neq 0$). Om $j = 2$, då är $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+j}) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+2}) = \mathrm{Var}(X_{n+2}) = \sigma^2$. Om $j \geq 3$, då är $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+j}) = \mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+3}) = 0$.

4) Låt $X(t)$ vara antalet explosioner i $(0,t)$, $X(t) \sim Poisson(t)$ (enheten 300 år).

   a) $X(60) \sim Poisson(\frac{1}{5})$ och $P(X(60) \geq 2) = 1 - P(X(60) \leq 1) = 1 - P(X(60) = 0) - P(X(60) = 1) = 1 - \exp(-\frac{1}{5})(1 + \frac{1}{5}) = 0.0175$.

   b) $X(450) \sim Poisson(\frac{3}{2})$ och $P(X(450) = 0) = \exp(-\frac{3}{2}) = 0.223$.

5) a) Låt X vara antalet insekter fångade innan första av art 1. Då är $X = Y - 1$, där $Y \sim Geom(p_1)$ och $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] - 1 = \frac{1}{p_1} - 1$.

b) Låt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om art } i \text{ fångas före art 1} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

för $i = 2, ..., r$. Om X är antalet arter som fångas före art 1, är $X = \sum_{i=2}^{r} X_i$ och $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=2}^{r} \mathbf{E}[X_i] = \sum_{i=2}^{r} P(X_i = 1) = \sum_{i=2}^{r} \frac{p_i}{p_i + p_1}$.