TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2005-04-02.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 8.2, s. 403)

2) Låt $A = \frac{1}{2}|X||Y|$ vara ytan av triangeln. Då är $\mathbf{E}[A] = \mathbf{E}[\frac{1}{2}|X||Y|] = \frac{1}{2}\mathbf{E}[|X|]\mathbf{E}[|Y|] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}[|X|)^2 = \frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx)^2$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi}(\int_0^{\infty} x \cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx - \int_{-\infty}^{0} x \cdot \exp(-\frac{1}{2}x^2)\,dx)^2 = \frac{1}{\pi}$.

3) Låt X vara tiden som råttan vandrar i labyrinten. Då är
$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}(3 + \mathbf{E}[X]) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3}(5 + \mathbf{E}[X])) = \frac{7}{2} + \frac{5}{6}\mathbf{E}[X]$ och $\mathbf{E}[X] = 21$.

4) Låt Y_i vara antal ögon på i-e kastet. Då är $X = \sum_{i=1}^{m_1} Y_i$ och $Y = \sum_{j=n-m_2+1}^{n} Y_j$.
Kovariansen mellan X och Y är $Cov(X,Y) = Cov(\sum_{i=1}^{m_1} Y_i, \sum_{j=n-m_2+1}^{n} Y_j)$
$= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=n-m_2+1}^{n} Cov(Y_i, Y_j)$. Nu är $Cov(Y_i, Y_j) = 0$ om $i \neq j$ (kasten oberoende) och då är $Cov(X,Y) = (m_1 - (n - m_2))Var(Y_i)$. Korrelationen är $Corr(X,Y) = Cov(X,Y)/\sqrt{Var(X)Var(Y)} = (m_1 + m_2 - n)/\sqrt{m_1 m_2}$.

5) Man skall beräkna sannolikheterna $P_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$ för $i, j = 0, 1, 2, 3$. Nu är $P_{00} = P_{02} = P_{03} = P_{13} = P_{20} = P_{30} = P_{31} = P_{33} = 0$ och $P_{01} = P_{32} = 1$. Sannolikheten P_{10} är

$$\begin{aligned} P_{10} = P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) &= P(\text{“vit från urna 1 och svart från urna 2”}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

På samma sätt får man att $P_{23} = \frac{1}{9}$. De resterande sannolikheterna P_{11}, P_{12}, P_{21} och P_{22} är $\frac{4}{9}$. T.ex.

$$\begin{aligned} P_{11} &= P(\text{“vit från urna 1 och vit från urna 2”}) \\ &\quad + P(\text{“svart från urna 1 och svart från urna 2”}) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}. \end{aligned}$$