TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2005-08-26.

Kortfattade lösningar:

1) a) $\mathbf{E}[Y] = b\mathbf{E}[X] + a = b\mu + a$ och $\mathrm{Var}(Y) = b^2\mathrm{Var}(X) = b^2\sigma^2$.

   b) $\rho(X, Y) = \pm 1$ därför att $Y = bX + a$, dvs en linjär funktion av X. Kovariansen är $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho(X, Y)\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\sigma^2 \cdot b^2\sigma^2} = b\sigma^2$.

2) Låt X vara tiden som råttan vandrar i labyrinten. Då är $\mathbf{E}[X] = \frac{1}{2}(3 + \mathbf{E}[X]) + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3}(5 + \mathbf{E}[X])) = \frac{7}{2} + \frac{5}{6}\mathbf{E}[X]$ och $\mathbf{E}[X] = 21$.

3) Låt X_i vara funktionstiden av kamera i, $X_i \sim Exp(\lambda)$.

   a) $P(X_1 > t, X_2 > t, X_3 > t) = P(X_1 > t)P(X_2 > t)PX_3 > t) = (P(X_1 > t))^3 = (\int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x}\, dx)^3 = e^{-3\lambda t}$.

   b) $P(X_i > t) = e^{-\lambda t}$ och då är $N \sim Bin(3, e^{-\lambda t})$

4) Låt X_i vara förlusten av den i. kunden. Då är $\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{5}(-2-1+0+1+2) = 0$ och $\mathbf{E}[X_i^2] = \frac{1}{5}(4 + 1 + 0 + 1 + 4) = 2$ vilket ger att $\mathrm{Var}(X_i) = 2$. Den totala förlusten är $X = \sum_{i=1}^{10000} X_i$ och då är $\mathbf{E}[X] = 0$ och $\mathrm{Var}(X) = 10000 \cdot 2$. Centrala gränsvärdessatsen ger att $P(X > 200) = P(\frac{X-0}{100\sqrt{2}} > \frac{200}{100\sqrt{2}}) \approx P(Z > \sqrt{2}) = 1 - \Phi(1.41) = 0.0793$, där $Z \sim N(0, 1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

5) Låt N vara antalet kast tills man får sexan för första gången, $N \sim Geom(\frac{1}{6})$. Låt X_i vara antalet ögon på kast i och X antalet ögon före den första sexan. Då är $X = \sum_{i=1}^{N-1} X_i$. Väntevärdet av X kan räknas $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|N]]$. Nu är $\mathbf{E}[X|N = n] = \mathbf{E}[\sum_{i=1}^{n-1} X_i] = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{E}[X_i] = (n - 1) \cdot \frac{1}{5} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3(n - 1)$ och $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[3(N - 1)] = 3(\mathbf{E}[N] - 1) = 3(6 - 1) = 15$.