TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, del 2. 2004-12-18.

Kortfattade lösningar:

1) Se boken (Kapitel 6.3, (3.1) och (3.2), s. 260-261)

2) Låt X vara antal fruar som sitter brevd sin man och låt

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{om fru } i \text{ sitter brevid sin man} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Då är $X = \sum_{i=1}^{10} X_i$ och $\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{10} \mathbf{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{10} P(X_i = 1) = 10 \cdot \frac{2}{19}$. Variansen är $Var(X) = \sum_{i=1}^{10} Var(X_i) + 2 \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)$. $Var(X_i) = \mathbf{E}[X_i^2] - (\mathbf{E}[X_i])^2 = \frac{2}{19} - \left(\frac{2}{19}\right)^2 = \frac{2}{19} \cdot \frac{17}{19}$. För att beräkna $Cov(X_i, X_j)$ behäver man $\mathbf{E}[X_i X_j]$. Det kan beräknas

$$\mathbf{E}[X_i X_j] = P(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{(1+1+16\cdot 2)\cdot 2\cdot 16!}{19!} = \frac{2}{19\cdot 9}.$$

Då är $Cov(X_i, X_j) = \frac{2}{19\cdot 9} - \left(\frac{2}{19}\right)^2$ och

$$Var(X) = 10 \cdot Var(X_i) + 2 \cdot \frac{10\cdot 9}{2} Cov(X_i, X_j) = \frac{360}{361}$$

3) Låt $X_i \sim Exp(5)$ vara tiden som behövs för första steget och $Y_i \sim Exp(\frac{10}{3})$ vara tiden som behövs för andra steget för maskin i. Då är $\mathbf{E}[X_i] = 0.2$, $Var(X_i) = 0.04$, $\mathbf{E}[X_i] = 0.3$ och $Var(X_i) = 0.09$. Låt $S_{20} = \sum_{i=1}^{20} (X_i + Y_i)$. Då är $\mathbf{E}[S_{20}] = 20(0.2 + 0.3) = 10$ och $Var(S_{20}) = 20(0.04 + 0.09) = 2.6$. Nu har man att
$P(S_{20} \le 8) = P\left(\frac{S_{20}-10}{\sqrt{2.6}} \le \frac{-2}{\sqrt{2.6}}\right) \approx \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{2.6}}\right) = 1 - \Phi(1.24) = 0.1075$, där $\frac{S_{20}-10}{\sqrt{2.6}} \approx N(0,1)$ och Φ är fördelningsfunktionen av den standardiserade normalfördelningen.

4)

$$P(A|X = x) = \begin{cases} \int_0^{x+10} \frac{1}{60}\, dy = \frac{1}{60}(x+10), & 0 < x \le 10 \\ \int_{x-10}^{x+10} \frac{1}{60}\, dy = \frac{20}{60}, & 10 < x < 50 \\ \int_{x-10}^{60} \frac{1}{60}\, dy = \frac{1}{60}(70 - x), & 50 \le x < 60 \end{cases}$$

Då är $P(A) = \int_0^{60} P(A|X = x) f_X(x)\, dx = \frac{11}{36} = 0.306$.

5) a) X_n är vädret på n-te dagen och

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{om det regnar} \\ 1, & \text{om det är soligt} \\ 2, & \text{om det är uppehåll} \end{cases}$$

och övergångsmatrisen är

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

b) $\pi_j = \sum_{k=0}^{2} \pi_k P_{kj}$ och $\sum_{k=0}^{2} \pi_k = 1$. Nu är $\pi_0 = \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$, $\pi_1 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$ och $\pi_2 = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{3}\pi_2$. Man får att $\pi_0 = \frac{1}{4}$, $\pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{8}$. Dvs. att proportionen av soliga dagar är $\pi_1 = \frac{3}{8}$ och proportionen av regniga dagar är $\pi_0 = \frac{1}{4}$.