

TENTAMEN: Sannolikhets teori 1, 10p. 2001-12-20.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42

Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

- 1) Låt X vara en Poissonfördelad stokastisk variabel med parameter λ . Beräkna väntevärdet av X genom att använda
 - a) definitionen av väntevärdet. (1.5p)
 - b) momentgenererande funktionen av Poissonfördelningen. (1.5p)
- 2) Ge definitionen av oberoendet av två händelser. Bevisa att om händelser A och B är oberoende då är också A och B^c oberoende. (3p)
- 3) Låt X_1, X_2, \dots, X_n vara stokastiska variabler.
 - a) Definiera variansen av X_i och kovariansen av X_i och X_j . (1p)
 - b) Bevisa att

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i < j} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

(1.5p)

- c) Anta att X_1, X_2, \dots, X_n är parvist oberoende. Vad är $\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$ då? Varför? (0.5p)
- 4) Det finns 3 röda och 7 svarta bollar i en urna. Spelarna A och B drar bollar från urnan en boll åt gången tills en röd boll dras. Hitta sannolikheten att A är den första som väljer en röd boll. (A drar först en boll, sedan B osv. Det finns ingen återläggning av bollarna.) (3p)
- 5) Elva personer, som representerar olika länder, ska placeras. Representanten från Ryssland och representanten från USA skall inte placeras bredvid varandra. På hur många olika sätt kan de då placeras
 - a) vid ett runt bord? (Två placeringsordningar antas vara samma om de kan fås från varandra genom att rotera bordet.) (1.5p)
 - b) i rad? (1.5p)

Vänd!

- 6) Först väljer man ett av ordena

SCHMERZ, KULUMISURIA och RIIUUYÖAIE

på måfå. Sedan väljer man från detta valda ord en bokstav på måfå. Anta att bokstaven som man har vald är en vokal. Vad är då (givet att den valda bokstaven är en vokal) sannolikheten att det valda ordet är finskt? (SCHMERZ är inte ett finskt ord men de andra två är.) (3p)

- 7) En råtta har hamnat i labyrinten. Från startpunkten (där den är nu) har den två olika riktningar att välja mellan: om den går till höger, kommer den att komma tillbaka till startpunkten efter 3 minuter, om den går till vänster, kommer den att vara ute efter 2 minuter med sannolikheten $\frac{1}{3}$ och kommer den att komma tillbaka till startpunkten efter 5 minuter med sannolikheten $\frac{2}{3}$. Bestäm den förväntade tiden som råtтан kommer att vandra i labyrinten om den alltid väljer riktningen från startpunkten slumpmässigt. (3p)
- 8) En viss typ av apelsiner har en vikt i gram som är normalfördelad med väntevärde 150 och varians 25.
- Bestäm sannolikheten att en apelsin tagen på måfå väger mindre än 155 gram? (1.5p)
 - Bestäm sannolikheten att åtminstone en av fem apelsiner väger mer än 155 gram. Antag oberoende. (1.5p)
- 9) En person åker först med buss 1 och sedan med buss 2. Väntetiderna X (buss 1) och Y (buss 2) är oberoende och likformigt fördelade över intervallen $(0,10)$ resp $(0,8)$, där enheten är minuter. Bestäm sannolikheten att personen får vänta sammanlagt minst 16 minuter på de båda bussarna. (3p)
- 10) Anta att livslängden av ett batteri är en exponentialfördelad stokastisk variabel med väntevärde $\frac{1}{2}$ (enheten månader). En maskin behöver ett batteri för att fungera. När maskinen slutar fungera byts batteriet ut mot ett annat batteri (med samma fördelning). Vad är sannolikheten (approximativt) att maskinen fungerar i 2 år (24 månader) med 40 sådana batterier? (Livslängdena av olika batterier är oberoende.) (3p)

Lycka till!