TENTAMEN: Sannolikhetsteori 1, 10p. 2003-12-20.

Lärare och jour: Aila Särkkä, telefon 772 35 42
Hjälpmedel: Valfri räknare med tömda minnen och formelblad.

1) a) Definiera oberoendet av två händelser. (1.5p)

   b) Låt X och Y vara oberoende stokastiska variabler sådana att $P(X = 0) = P(Y = 0) = p$ och $P(X = 1) = P(Y = 1) = 1 - p$, och låt

$$Z = \begin{cases} 1, & \text{om } X = Y \\ 3, & \text{om } X \neq Y \end{cases}$$

   När (med vilka värden av p) är händelserna $\{X = 0\}$ och $\{Z = 3\}$ oberoende? (1.5p)

2) Låt X vara en diskret stokastisk variabel, som kan anta värdena x_i, $i \geq 1$, med respektive sannolikheter $p(x_i)$. Bevisa att då är för vilken som helst reellvärd funktion g

$$\mathbf{E}[g(X)] = \sum_i g(x_i)p(x_i).$$

(3p)

3) Låt X och Y vara oberoende Poissonfördelade variabler med respektive parametrar λ_1 och λ_2. Härled fördelningen för $X + Y$. Nämn något annat sätt (än det som du använder) att göra det. (3p)

4) I serieproduktion är livslängden (i månader) av ett batteri en stokastisk variabel som är exponentialfördelad med parameter 0.1. Viktor föreslår en förbättring vilken skulle minska parametervärdet till b. Det skulle betyda ökade konstnader och därför vill ledningen acceptera ändringen endast om sannolikheten att ett batteri (tillverkat med den nya metoden, efter förbättringen) valt på måfå håller längre än 10 månader skulle öka med minst 10%. Vad måste b vara för att ledningen skulle acceptera ändringen? (3p)

5) Eva och Adam ställer sig i en kö med 8 andra personer helt slumpmässigt.

   a) Vad är sannolikheten att de står bredvid varandra? (1.5p)

   b) Vad är sannolikheten att det finns högst 2 personer mellan dem? (1.5p)

Vänd!

6) Pekka köper två påser plommon, tio plommon i vardera. Det finns 7 mogna och 3 råa plommon i påse 1 och 3 mogna och 7 råa i påse 2. Pekka låter sin flickvän först välja en av påsena. Vad är sannolikheten att hon valde påse 2 givet att efter att ha ätit hälften av plommona märker hon att två har varit råa? (3p)

7) Kalle och Mia kommer att träffas på centralstationen. Mia åker spårvagn från Långedrag och samtidigt åker Kalle buss från Johanneberg. Restiden av spårvagnen är N(30,64)-fördelad och restiden av bussen är N(20,36)-fördelad. Restiderna antas vara oberoende av varandra. Vad är sannolikheten att

   a) den som kommer först behöver inte vänta på den andra längre än 10 minuter? (1.5p)

   b) Mia kommer först? (1.5p)

8) Antag att X och Y är oberoende och exponentialfördelade med parameter 1 samt att $Z = X + Y$. Vad är korrelationen mellan X och Z? (3p)

9) En fånge är i en cell som har tre dörrar. Den första dörren leder till en tunnel som tar honom tillbaka till cellen efter 2 dagar. Den andra dörren leder till en tunnel som tar honom tillbaka till cellen efter 3 dagar. Den tredje dörren leder direkt till frihet. Vad är det förväntade antalet dagar tills han är i frihet, om

   a) han alltid väljer dörr 1, 2 och 3 med respektiva sannolikheter 0.5, 0.3 och 0.2? (1.5p)

   b) han alltid lika sannolikt väljer en av dörrarna som han inte har provat än? (1.5p)

10) Antag att livslängden av en komponent är en stokastisk variabel med väntevärde a och varians a^2. Hur många komponenter behöver man om man vill att summan av deras livslängder är mindre eller lika med $8a$ med sannolikhet som är högst 0.025? Livslängderna antas vara oberoende och likafördelade. (3p)

Lycka till!