

Finite elementmetoder för multiskal- och multifysikproblem

Axel Målqvist

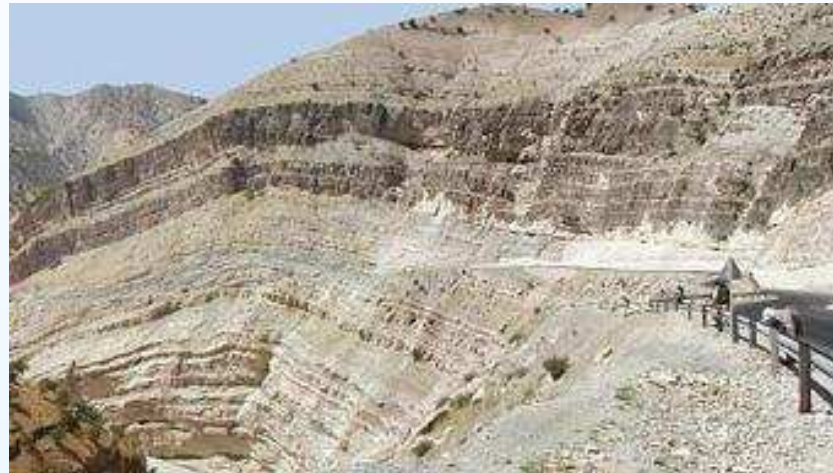
`axel.malqvist@it.uu.se`

Institutionen för informationsteknologi

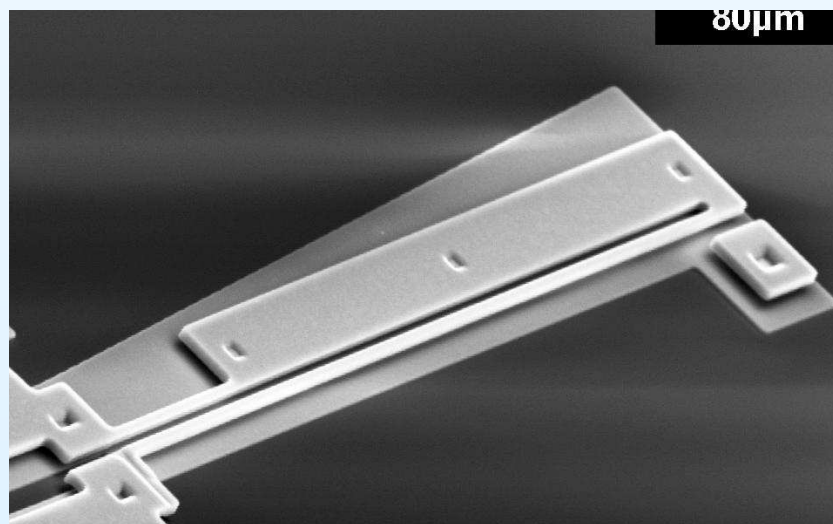
Uppsala universitet

Vad är ett multiskal/multifysik problem?

Flöde i porösa medier: Oljereservoarsimulering.



Mikroelektromekaniska system: Elektronmikroskåp.



Översikt

- Modellproblem, svag form
- Finita elementmetoden
- Feluppskattningar, konvergens, adaptivitet
- Multifysikproblem: Joule heating
- Multiskalproblem: Oljereservoarsimulering
- Sammanfattning

Modellproblem

Poisson's ekvation. Låt $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ vara ett beräkningsområde med rand $\partial\Omega$, och låt $0 < \alpha \leq a \leq \beta$ vara begränsad och $f \in L^2(\Omega)$. Vi söker u som löser

$$-\nabla \cdot a \nabla u = f \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \text{ på } \partial\Omega.$$

Svag form. Efter multiplikation med en testfunktion $v \in \mathcal{V} = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega)^d \text{ och } \text{tr}(v) = 0\}$, integration \int_{Ω} och Green's formel får vi: Hitta $u \in \mathcal{V}$ sådant att

$$(a \nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} a \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx = (f, v) \quad \text{för alla } v \in \mathcal{V}.$$

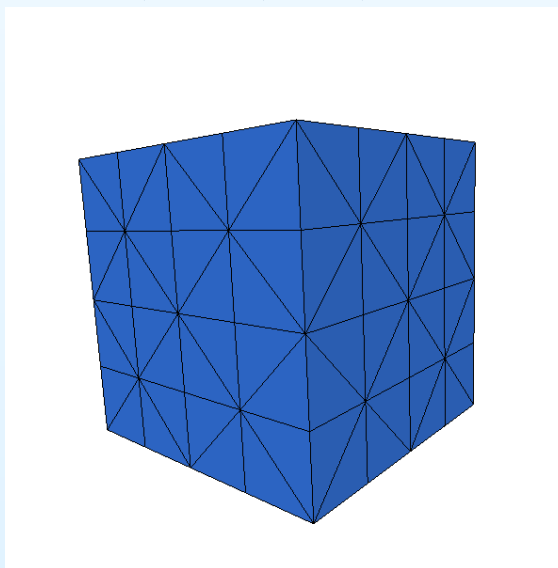
Existens och entydighet ges av Lax-Milgrams sats, dessutom $\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C$. Högre regularitet \Rightarrow mer antaganden.

$$L^2(\Omega) = \{v : \int_{\Omega} v^2 \, dx < \infty\} \text{ och } \|v\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} v^2 \, dx\right)^{1/2}$$

Finite element approximation av den svaga lösningen

- Dela in Ω (eller en approximation av Ω) i element $\mathcal{T} = \{\tau\}$, tex simplexer $\Omega = \cup \tau$.
- Konstruera ett rum att styckvisa polynom $\mathcal{V}_h = \{v \in C(\Omega) : v|_{\tau} \text{ polynom}\}$ sådant att $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ (diskontinuerliga element kan även används).
- Hitta $u_h \in \mathcal{V}_h$ sådant att

$$(a \nabla u_h, \nabla v) = (f, v) \quad \text{för alla } v \in \mathcal{V}_h.$$



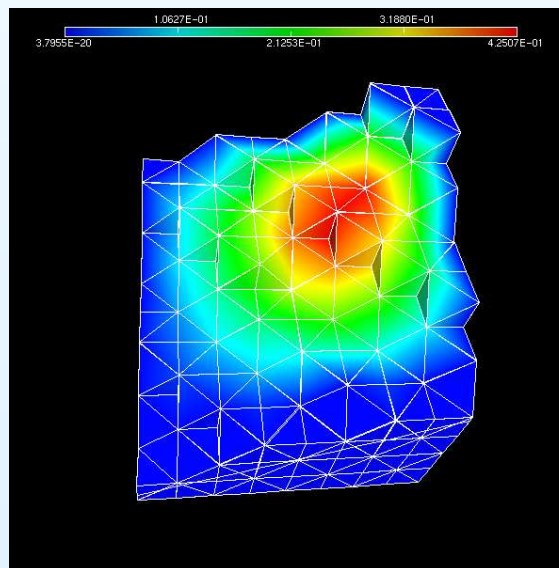
Linjärt ekvationssystem

Vi låter $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ vara bas för \mathcal{V}_h sådan att $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$. Givet

$$A_{ij} = (a \nabla \phi_i, \nabla \phi_j) \quad b_j = (f, \phi_j)$$

har vi $A\vec{u}_h = b$ där $u_h = \sum_{i=1}^n \vec{u}_h^i \phi_i$.

A är symmetrisk och positivt definit vilket ger existens av lösning. Systemet löses tex med algebraisk multigrid.



A priori feluppskattning

Vi har $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ och

$$(a \nabla u, \nabla v) = (f, v), \text{ för alla } v \in \mathcal{V}$$

$$(a \nabla u_h, \nabla v) = (f, v), \text{ för alla } v \in \mathcal{V}_h$$

alltså, $(a \nabla(u - u_h), \nabla v) = 0$ för alla $v \in \mathcal{V}_h$.

$$\begin{aligned} \|\sqrt{a} \nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (a \nabla(u - u_h), \nabla(u - u_h)) \\ &= (a \nabla(u - u_h), \nabla(u - v)) \\ &\leq \|\sqrt{a} \nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\sqrt{a} \nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Interpolationsuppskattning ger för $h_\tau = \text{diam}(\tau)$ och $\alpha \leq p$

$$\begin{aligned} \|\sqrt{a} \nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &= \min_{v \in \mathcal{V}_h} \|\sqrt{a} \nabla(u - v)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|\sqrt{a} \nabla(u - \pi u)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{\tau \in \mathcal{T}} h_\tau^\alpha \|D^{\alpha+1} u\|_{L^2(\tau)} \end{aligned}$$

A posteriori feluppskattning och adaptivitet

Feluppskattning i termer av den beräknade lösningen:

$$\begin{aligned}\|\sqrt{a}\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \left(h_\tau^2 \|f + \nabla \cdot a \nabla u_h\|_{L^2(\tau)}^2 + \frac{h_\tau}{2} \|[n \cdot a \nabla u_h]\|_{L^2(\partial\tau)}^2 \right) \\ &=: C \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \rho_\tau(u_h)^2\end{aligned}$$

Adaptivitet.

Skapa en diskretisering \mathcal{T} av Ω .

Konstruera finita elementrummet \mathcal{V}_h .

Beräkna u_h .

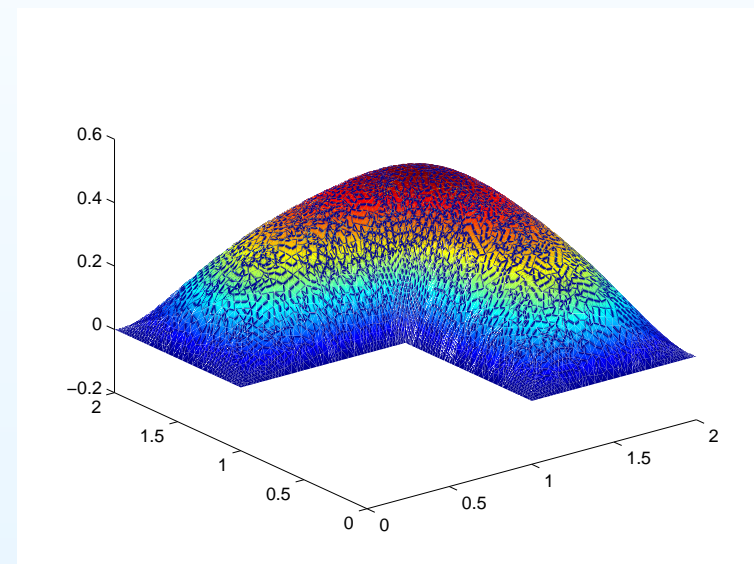
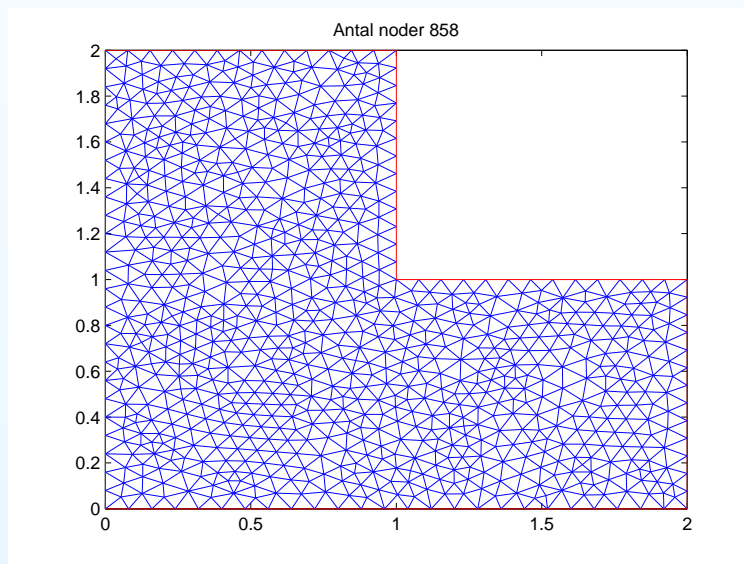
Beräkna elementindikatorerna $\rho_\tau(u_h)$.

Förfina de element med stor felindikator, gå till andra steget eller stanna, om felet är nog litet.

Numeriskt exempel

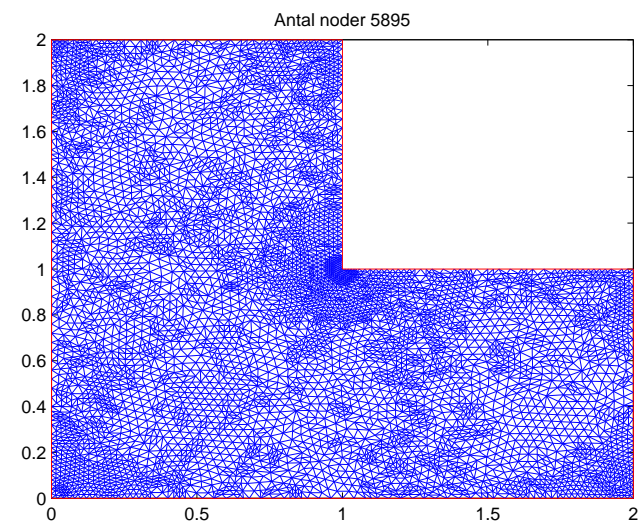
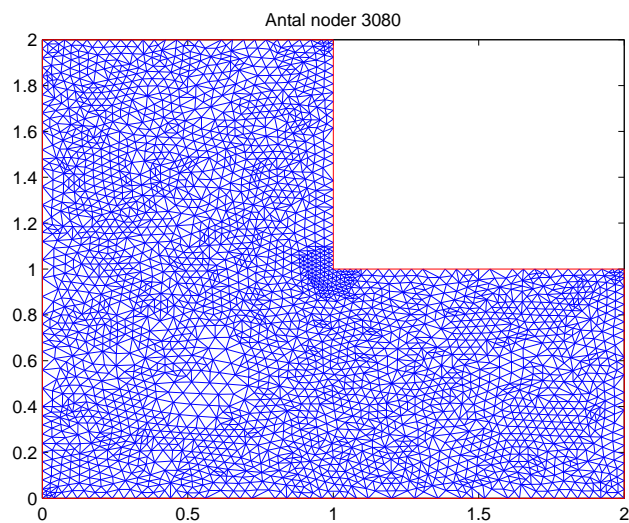
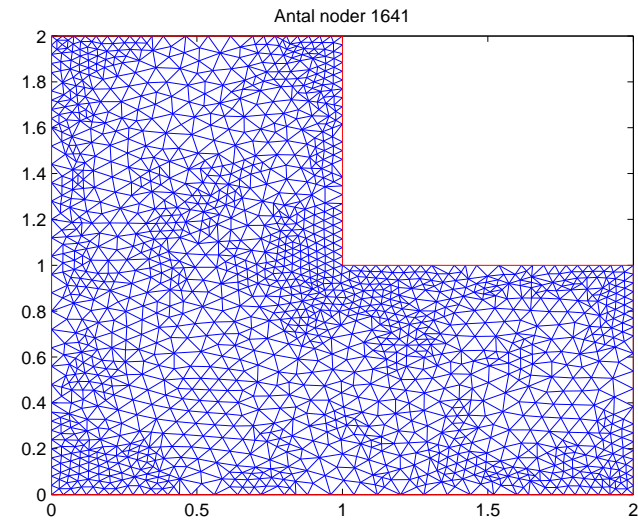
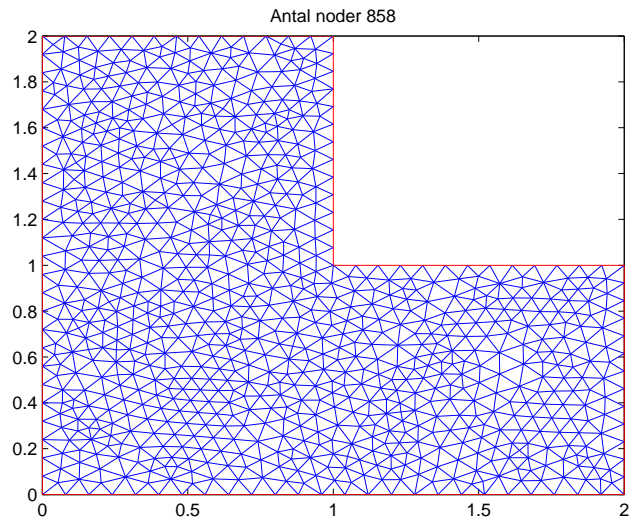
Låt $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vara ett L-format område och $a = f = 1$,

$$-\Delta u = 1 \quad \text{i } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{på } \partial\Omega.$$



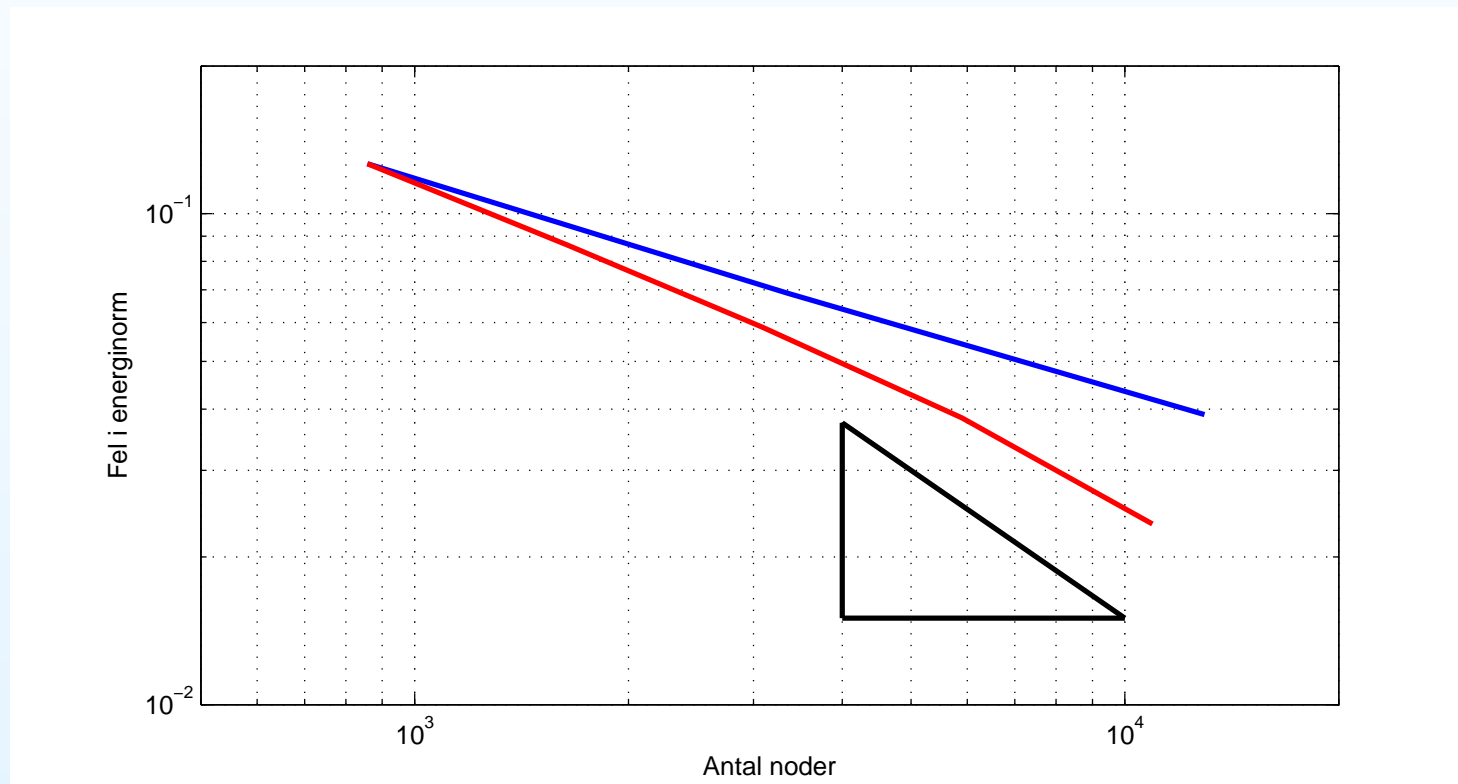
- Inåtgående hörn sänker regulariteten.
- Vi använder linjära kontinuerliga basfunktioner $p = 1$.
- Vi låter $h = 0.08$ och använder den adaptiva algoritmen med 20% förfining i varje iteration (totalt 3 iterationer).

Adaptivitet



Adaptivitet

Felet i energinorm $\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}$ vid adaptiv (röd) och uniform (blå) nätförfining.



Optimal ordning ($p = 1$) återfås.

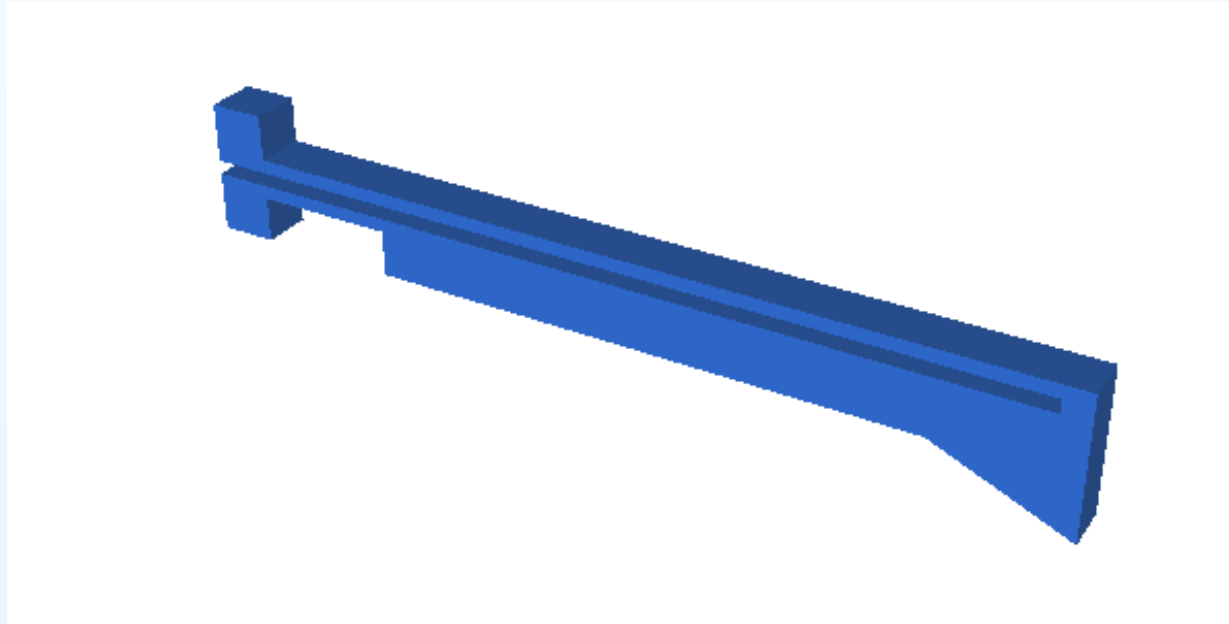
Sammanfattning så här långt

1. Existens och regularitet
 2. Geometri och diskretisering
 3. Finita elementmetoden och lösare
 4. A priori feluppskattning och konvergens
 5. A posteriori feluppskattning och adaptivitet
- Fix och Strang, *An analysis of the finite element method*, 1973.
 - Babuška och Reinboldt, *Error estimates for adaptive finite element computations*, 1978.
 - Verfürth, *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*, 1996.

Multifysik: mikroelektromekaniska system

”Joule heating” problemet.

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \phi) = f, & \text{i } \Omega, & u = 0 \text{ på } \partial\Omega \\ -\Delta u = \sigma(u) |\nabla \phi|^2 & \text{i } \Omega, & \phi = 0 \text{ på } \partial\Omega \end{cases}$$



Där ϕ är elektrisk potential, u är temperatur, $0 < \alpha \leq \sigma(\cdot) \leq \beta$ är dielektrisitetskoefficient och $|f| \leq \gamma$ är laddningstäthet.

Vilka utmaningar finns i detta problem?

Komplikationer:

- 3D och ej trivial geometri.
- Icke-linjärt problem.
- System av två partiella differentialekvationer.
- Potentiell låg regularitet i högerledet $\sigma(u)|\nabla\phi|^2$.

1. Existens och regularitet
2. Geometri och diskretisering
3. Finita elementmetoden och lösare
4. A priori feluppskattning och konvergens
5. A posteriori feluppskattning och adaptivitet

Existens och regularitet

Svag form. Finn $\phi, u \in \mathcal{V} = \{v \in L^2(\Omega) : \nabla v \in L^2(\Omega)^d, \text{tr}(v) = 0\}$

$$(\sigma(u)\nabla\phi, \nabla v) = (f, v) \quad (\nabla u, \nabla w) = (\sigma(u)|\nabla\phi|^2, w), \quad \forall v, w \in \mathcal{V}.$$

Existens. Låt $T(x), \phi_x \in \mathcal{V}$ uppfylla

$$(\sigma(x)\nabla\phi_x, \nabla v) = (f, v) \quad (\nabla T(x), \nabla w) = (\sigma(x)|\nabla\phi_x|^2, w), \quad \forall v, w \in \mathcal{V}.$$

Lax-Milgram ger $\|T(x)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla T(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ oberoende av x , om $|\phi_x| \leq C'$ för alla x , men det gäller ty $|f| \leq \gamma$.

Man kan sen visa att T är kontinuerlig, $T(x_n) \rightarrow T(x)$ då $x_n \rightarrow x$. Eftersom \mathcal{V} är kompakt inbäddad i $L^2(\Omega)$ ger **Schauder's fixpunktsats** existens av fixpunkt $x = T(x)$.

Men $x = T(x)$ medför $u = x \in \mathcal{V}$ och $\phi = \phi_x \in \mathcal{V}$ svag lösning. Entydighet ges dock **ej** av detta resultat.

Diskretisering och FEM

Låt $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ vara rummet av kontinuerliga styckvis linjära basfunktioner. Hitta $\phi_h, u_h \in \mathcal{V}_h$ sådana att

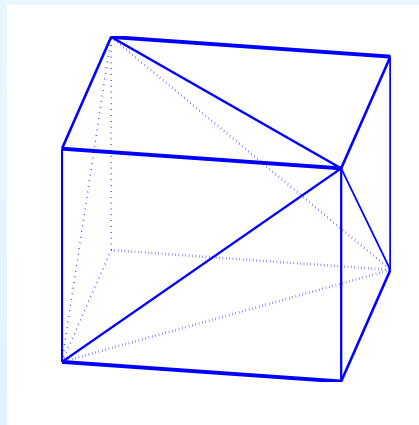
$$\begin{cases} (\sigma(u_h) \nabla \phi_h, \nabla v) = (f, v) \\ (\nabla u_h, \nabla w) = (f \phi_h, w) - (\phi_h \sigma(u_h) \nabla \phi_h, \nabla w) \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_h. \end{cases}$$

Existens av diskret lösning fås genom **Brouwer** om vi

- omformulerar högerledet med produktregeln:

$$(\sigma(u) |\nabla \phi|^2, w) = (\nabla \cdot (\phi \sigma(u) \nabla \phi) - \phi \nabla \cdot \sigma(u) \nabla \phi, w) = -(\phi \sigma(u) \nabla \phi, \nabla w) + (f \phi, w).$$

- garanterar ϕ_h är begränsad oberoende av h (krav på nät).

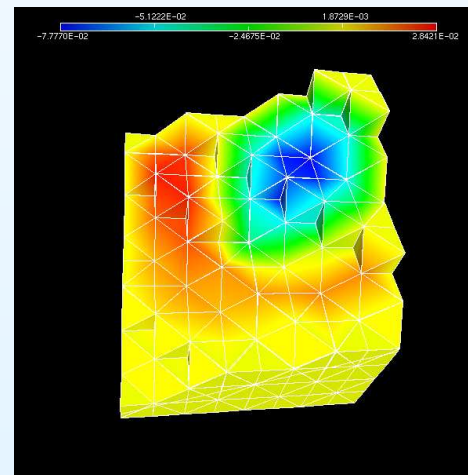
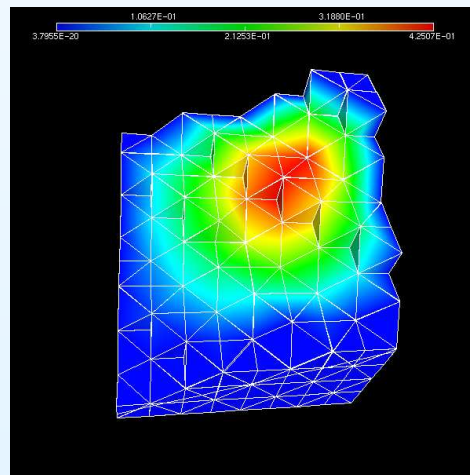


Numeriskt exempel

GS iteration. Givet u_h^0 hitta $\phi_h^i, u_h^i \in \mathcal{V}_h$ sådan att

$$\begin{cases} (\sigma(u_h^{i-1}) \nabla \phi_h^i, \nabla v) = (f, v) \\ (\nabla u_h^i, \nabla w) = (f \phi_h^i, w) - (\phi_h^i \sigma(u_h^{i-1}) \nabla \phi_h^i, \nabla w), \quad \forall v, w \in \mathcal{V}_h. \end{cases}$$

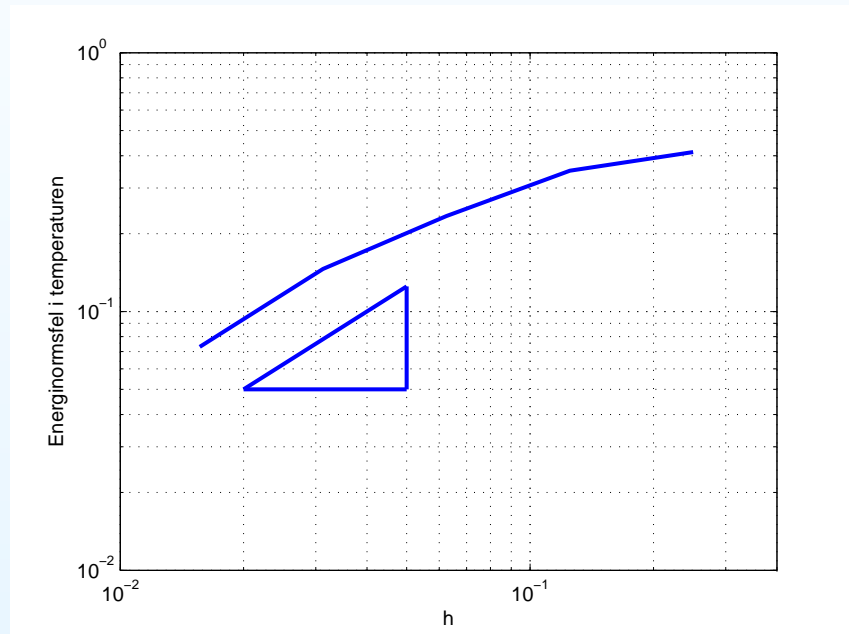
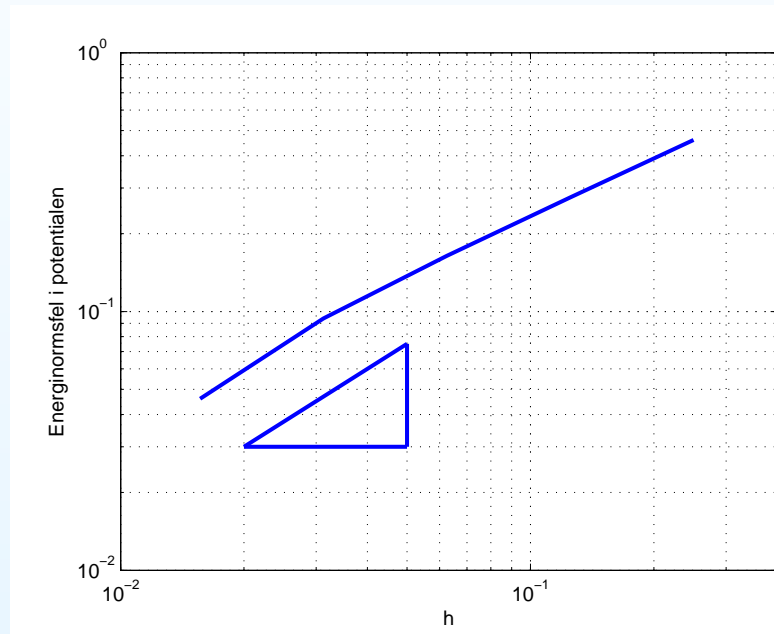
Exempel. Låt $f = 10xyz e^{-((x-0.5)^2 + (y-0.5)^2 + (z-0.5)^2)}$ och $\sigma(u) = 0.05 + \frac{0.15}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{u+0.05}{0.05}\right) \right)$.



Bilden visar ϕ_h och u_h , $8 \times 8 \times 8$ delkuber i enhetskuben.

Numeriskt exempel, konvergens/felanalys

Plot av relativt fel (mot ref lösning med $128 \times 128 \times 128$ element) i energinorm ($\|\nabla \cdot\|$)



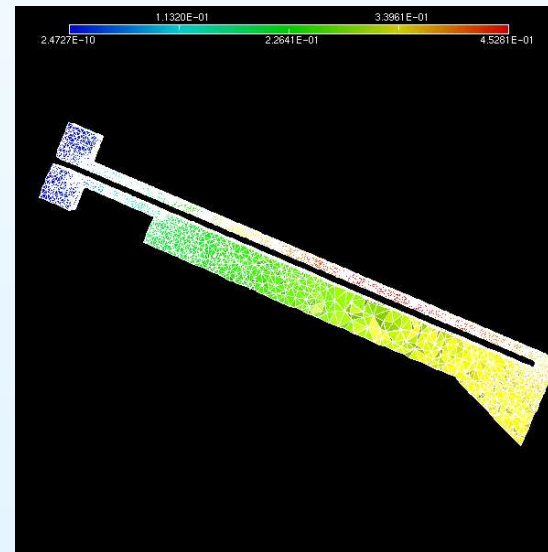
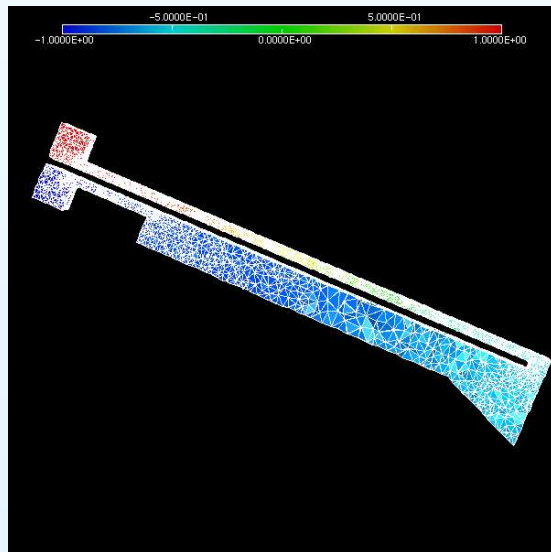
Teoretiska resultat för felet:

1. Konvergens av fem lösningen $\phi_h, u_h \rightarrow \phi, u$ i \mathcal{V} visad.
2. A posteriori uppskattning endast för "snälla" σ (pågående forskning).

MEMS tillämpningen

$$\text{Låt } \sigma(u) = 0.5 + \frac{1.5}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{u-0.25}{0.005}\right) \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\nabla \cdot (\sigma(u) \nabla \phi) = 0, \quad \text{i } \Omega \\ -\Delta u = \sigma(u) |\nabla \phi|^2, \quad \text{i } \Omega \\ \phi = 1 \text{ på } \partial\Omega_{D+} \quad \phi = -1 \text{ på } \partial\Omega_{D-} \quad n \cdot \nabla \phi = 0 \text{ annars} \\ u = 0 \text{ på } \partial\Omega_{D+} \quad u = 0 \text{ på } \partial\Omega_{D-} \quad n \cdot \nabla u = 0 \text{ annars} \end{array} \right.$$



Holst et. al. *Convergence analysis of finite element approximations of the Joule heating problem in 3D*, BIT 2010.

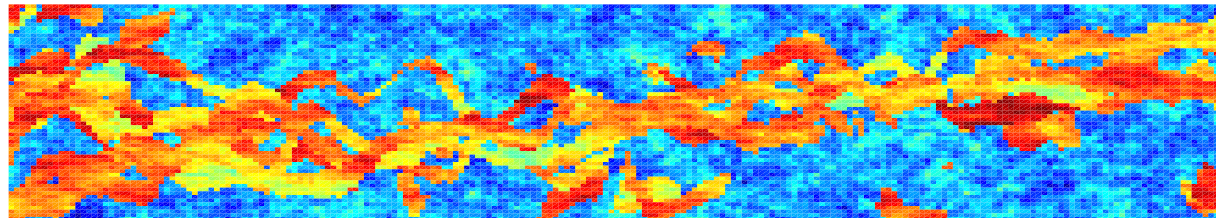
Multiskal: oljereservoarsimulering

Vi söker vattenkoncentration s tryck u och hastighetsfält σ

$$\sigma - a\lambda(s)\nabla u = 0 \quad -\nabla \cdot \sigma = q$$

$$\dot{s} + \sigma \cdot \nabla f(s) = 0$$

där a är permeabilitet (bilden), $\lambda(s) = \lambda_v(s) + \lambda_o(s)$ total mobilitet (tex $\lambda_w = s^2/\mu_w$ och $\lambda_o = (1-s)^2/\mu_o$, där μ är viskositet), q källterm och $f(s) = \frac{\lambda_v(s)}{\lambda_v(s)+\lambda_o(s)}$.



IMPES (IMplicit Pressure, EXplicit Saturation): Givet s_0

$$\sigma_n - a\lambda(s_{n-1})\nabla u_n = 0$$

$$-\nabla \cdot \sigma_n = q$$

$$\dot{s}_n + \sigma_n \cdot \nabla f(s_{n-1}) = 0.$$

Vilka är utmaningarna i tryckekvationen?

Vi har

$$\begin{aligned}\sigma_n - a\lambda(s_{n-1})\nabla u_n &= 0 \\ -\nabla \cdot \sigma_n &= q.\end{aligned}$$

Likt modellproblemet $-\nabla \cdot (a\lambda(s_{n-1})\nabla u_n) = q$ men:

- a har finskalestruktur som är svår att lösa upp
 - stort linjärt ekvationssystem måste lösas i varje tidssteg
 - $\lambda(s(x))$ ändras i varje tidssteg (vid vattenfronten).
1. Existens och regularitet (följer direkt, för syst. Schauder)
 2. Geometri och diskretisering (I allmänhet komplicerat)
 3. Finita elementmetoden och lösare (multigrid?, multiskal!)
 4. A priori feluppskattning och konvergens
 5. A posteriori feluppskattning och adaptivitet (om vi har tid)

FE bas för problem på mixad form (skippa n , $a := a\lambda$)

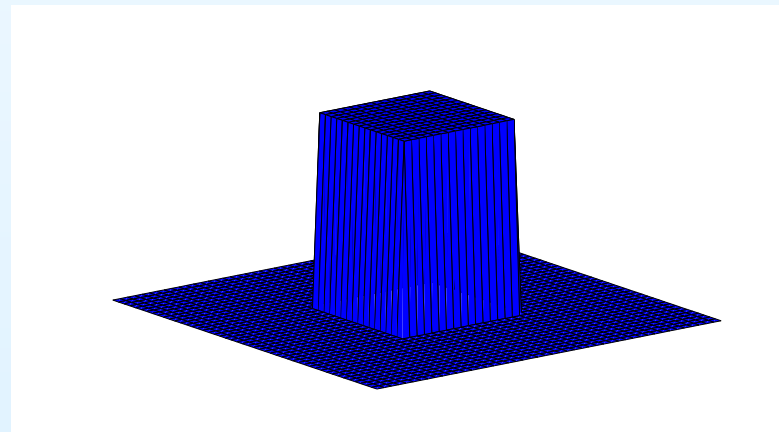
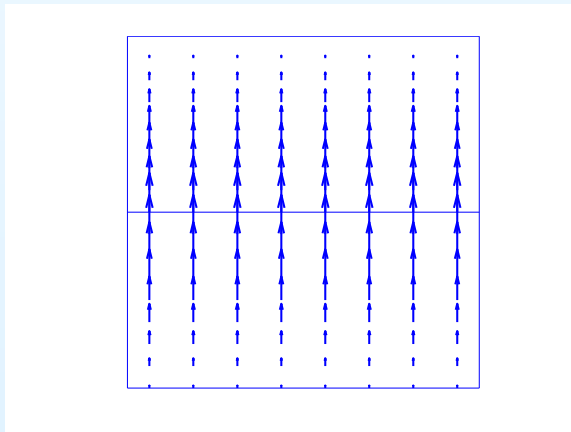
På svag form vill vi lösa: hitta $\sigma \in \mathcal{V}$ och $u \in \mathcal{W}$ sådana att

$$\left(\frac{1}{a}\sigma, v\right) + (u, \nabla \cdot v) = 0, \quad (\nabla \cdot \sigma, w) = -(q, w)$$

$$\forall v \in \mathcal{V} = \{v \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot v \in L^2(\Omega)\} \quad \forall w \in \mathcal{W} = L^2(\Omega).$$

Standard (konsertiv) FEM för detta problem är

- Raviart-Thomas funktioner ϕ_i , för \mathcal{V} , vektorvärda, normalkontinuerliga, en frihetsgrad per kant/yta.
- Styckvisa konstanter ψ_k , för \mathcal{W} , skalära, diskontinuerliga.



Finita elementmetoden och lösare

Vi får ett ekvationssystem på följande form:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_h \\ u_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$$

där $A_{ji} = (\frac{1}{a}\phi_i, \phi_j)$, $B_{jk} = (\psi_k, \nabla \cdot \phi_j)$ och $b_k = -(q, \psi_k)$.

Felanalys ger $\|\frac{1}{\sqrt{a}}(\sigma - \sigma_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{Ch}{\epsilon}$, där ϵ representerar den finaste skalan i problemet.

- Lösa upp finskalan i a och lösa i varje tidssteg är kostsamt.
- Vi vill istället utnyttja att $a(:= a\lambda(s))$ ej ändras mellan tidsstegen förutom vid fronten, ($\lambda(0)$ och $\lambda(1)$ konstanta).
- Vi använder ett grovt nät \mathcal{T}_c ($H > \epsilon$) med **modifierade RT basfunktioner** som tar hänsyn till finstrukturen i a och som är **återanvändbara** i beräkningen.

Variationsmultiskalmetoden

Låt \mathcal{T}_c vara ett grovt nät. Splitta $\mathcal{V} = \mathcal{V}_c \oplus \mathcal{V}_f$ och $\mathcal{W} = \mathcal{W}_c \oplus \mathcal{W}_f$

- RT rum: $\mathcal{V}_c = \text{span}(\{\phi_i\})$ och $\mathcal{V}_f = \{v \in \mathcal{V} : \Pi_c v = 0\}$.
- Styckvis konstant rum: $\mathcal{W}_c = \text{span}(\{\psi_i\})$ och $\mathcal{W}_f = \{w \in \mathcal{W} : P_c w = 0\}$.

Vi har $(w_f, \nabla \cdot v_c) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_c} \nabla \cdot v_c \int_{\tau} w_f dx = 0$, $(w_c, \nabla \cdot v_f) = 0$.

Hitta $\sigma_c + \sigma_f \in \mathcal{V}_c \oplus \mathcal{V}_f$ och $u_c + u_f \in \mathcal{W}_c \oplus \mathcal{W}_f$ så att,

$$\left(\frac{1}{a}(\sigma_c + \sigma_f), v_c\right) + (u_c, \nabla \cdot v_c) + (\nabla \cdot \sigma_c, w_c) = -(q, w_c)$$

$$\left(\frac{1}{a}\sigma_f, v_f\right) + (u_f, \nabla \cdot v_f) + (\nabla \cdot \sigma_f, w_f) = -(q, w_f) - \left(\frac{1}{a}\sigma_c, v_f\right)$$

för alla $v_c \in \mathcal{V}_c$, $v_f \in \mathcal{V}_f$, $w_c \in \mathcal{W}_c$ och $w_f \in \mathcal{W}_f$. Vill eliminera σ_f ur den grovskaliga ekvationen.

Modifierad grovskaleekvation

Vi delar upp finskaleekvationen: hitta $T_\sigma v_c, \sigma_{f,q} \in \mathcal{V}_f$ och $T_u v_c, u_{f,q} \in \mathcal{W}_f$ sådana att

$$(i) \quad \left(\frac{1}{a} T_\sigma v_c, v_f\right) + (T_u v_c, \nabla \cdot v_f) + (\nabla \cdot T_\sigma v_c, w_f) = -\left(\frac{1}{a} v_c, v_f\right)$$

$$(ii) \quad \left(\frac{1}{a} \sigma_{f,q}, v_f\right) + (u_{f,q}, \nabla \cdot v_f) + (\nabla \cdot \sigma_{f,q}, w_f) = -(q, w_f).$$

Notera $\sigma_f = T_\sigma \sigma_c + \sigma_{f,q}$. Vi förenklar analysen genom $q \in \mathcal{W}_c$.

Grovskaleekvationen. Hitta $\sigma_c \in \mathcal{V}_c$ och $u_c \in \mathcal{W}_c$ så att

$$\left(\frac{1}{a} (\sigma_c + T_\sigma \sigma_c), v_c + T_\sigma v_c\right) + (u_c, \nabla \cdot v_c) = 0$$

$$(\nabla \cdot \sigma_c, w_c) = -(q, w_c).$$

Algebraisk manipulation av (i) och (ii) ger $\left(\frac{1}{a} \sigma_{f,q}, v_c\right) = 0$ och $\left(\frac{1}{a} (v_c + T_\sigma v_c), T_\sigma w_c\right) = 0$ för alla $v_c, w_c \in \mathcal{V}_c$.

Kan vi beräkna en approximation av $T_\sigma v_c \in \mathcal{V}_f$?

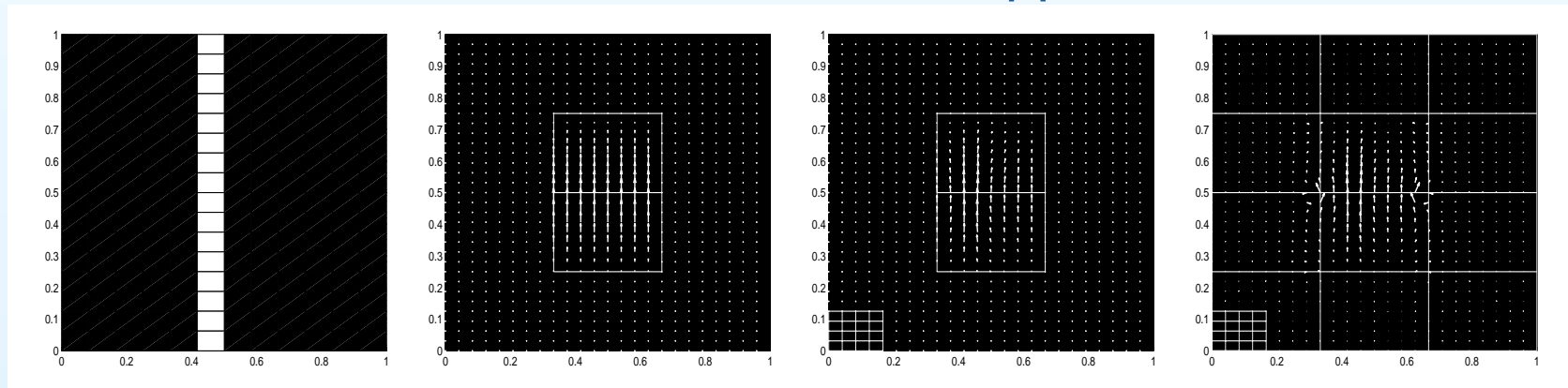
Låt $v_c = \phi_i$. Hitta $T_\sigma \phi_i \in \mathcal{V}_f$ och $T_u \phi_i \in \mathcal{W}_f$ så att

$$\left(\frac{1}{a} T_\sigma \phi_i, v_f\right) + (T_u \phi_i, \nabla \cdot v_f) = -\left(\frac{1}{a} \phi_i, v_f\right) \quad \forall v \in \mathcal{V}_f$$

$$(\nabla \cdot T_\sigma \phi_i, w_f) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}_f.$$

Vi beräknar approximationer $T_\sigma \phi_i \in \mathcal{V}_f$ genom att

- lokalisera problemen i rummet till **patchar** $\omega_i \supset \text{supp}(\phi_i)$,
- diskretisera med fint nät som löser upp finskalestrukturen.



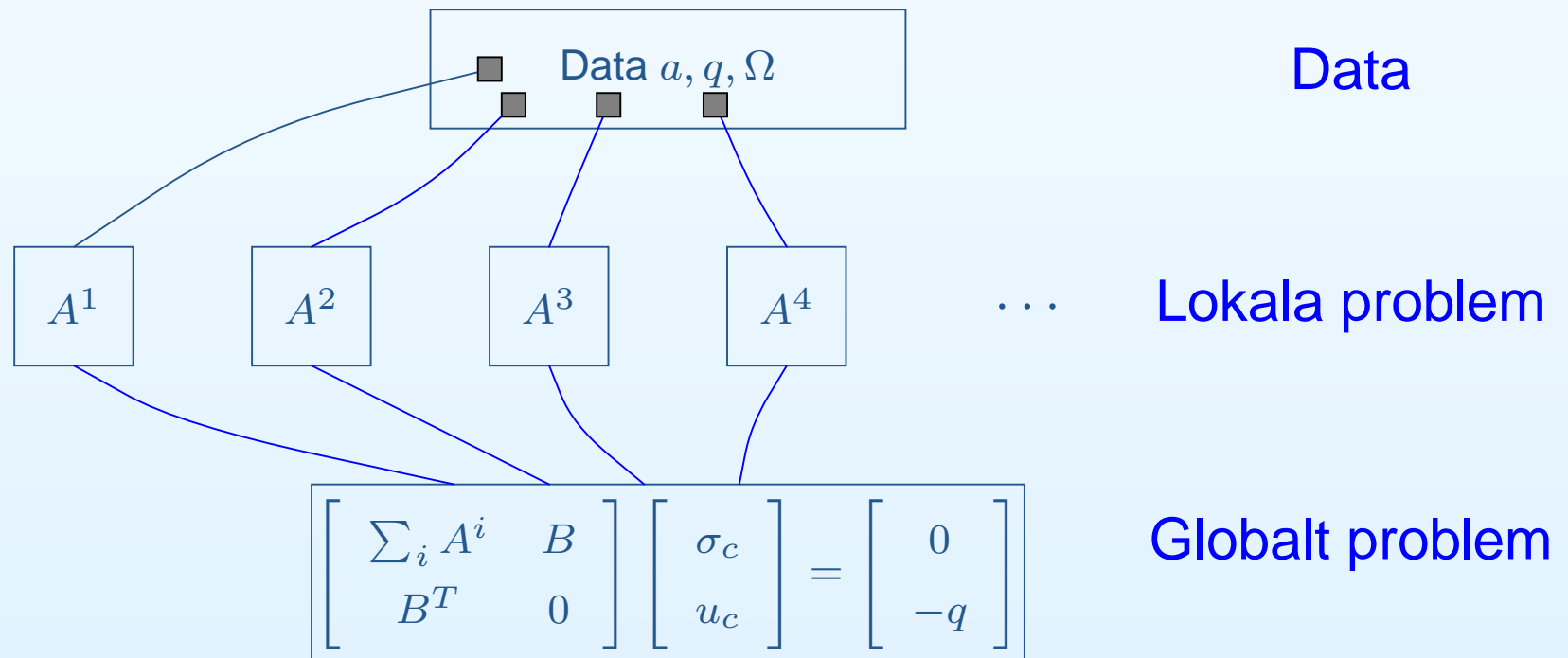
Dubbel perm. i vita fältet. Vi plottar $\phi_i + T_\sigma \phi_i$ på ett och två **lager** patchar. Snabbt avtagande ty $T_\sigma \phi_i \in \mathcal{V}_f \rightarrow \int_F n \cdot T_\sigma \phi_i dx = 0$.

Parallell struktur

Ekvationssystemet som behöver lösas på den grova skalan är

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_c \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q \end{bmatrix}$$

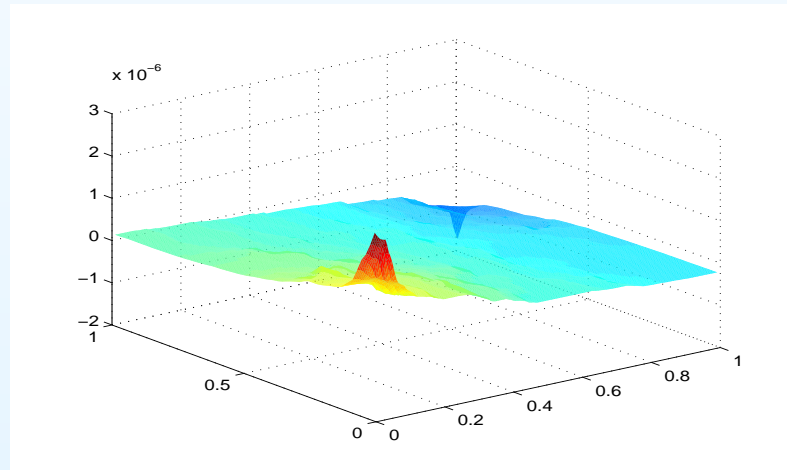
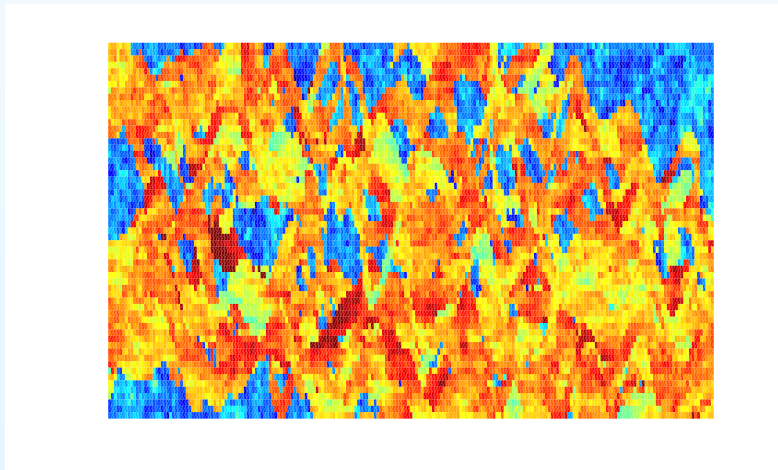
$$\tilde{A}_{ij} = \left(\frac{1}{a} (\phi_i + T_\sigma \phi_i), \phi_j + T_\sigma \phi_j \right), B_{kj} = (\psi_k, \nabla \cdot \phi_j) \text{ och } b = (q, \psi_k)$$



Tryckekvationen med homogena Neumannvillkor

$$\begin{cases} \frac{1}{a}\sigma - \nabla u = 0 & \text{i } \Omega \\ -\nabla \cdot \sigma = q & \text{i } \Omega \\ n \cdot \sigma = 0 & \text{på } \partial\Omega \end{cases}$$

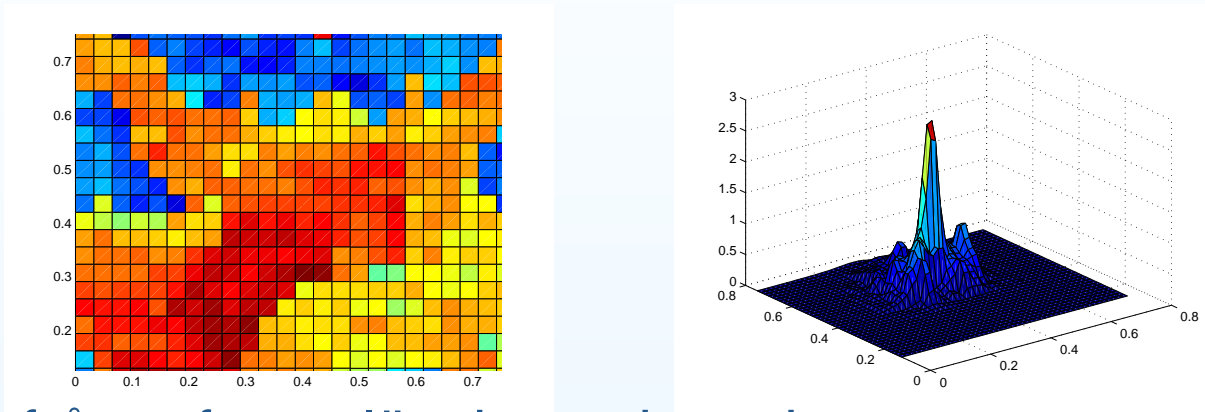
Permeabiliteten är från *SPE comp. solution project* (nedersta) och q är 1 längst ner till vänster och -1 högst upp till höger.



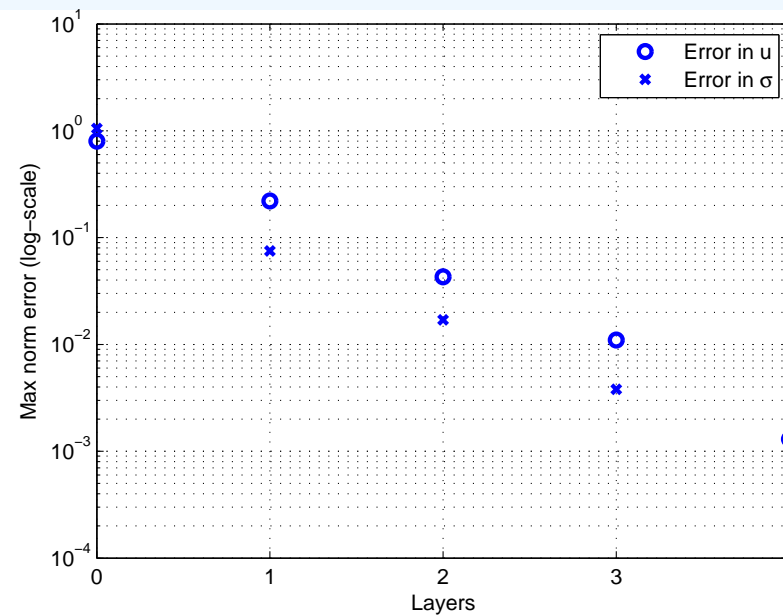
- Referenslösningen har 220×60 element.
- Grova nätet har 55×15 element och $h = H/4$.
- Lokala problem löses för varje grov RT basfunktion ϕ_i .

Konvergens i numeriskt exempel

Beloppet av $T_\sigma \phi_i$ beräknat på en tre-lager patch.



Avvikelse från referenslösningen i u och σ .



Felanalys

A priori uppskattning och konvergens. Metoden är utformad så att när $\omega_i = \Omega$ för alla i återfås referenslösningen på det fina nätet alltså,

$$\text{felet} \rightarrow 0 \text{ när } h \rightarrow 0 \text{ och } L \rightarrow \infty$$

Hur konvergens sker i termer L är fortfarande olöst.

A posteriori feluppskattning.

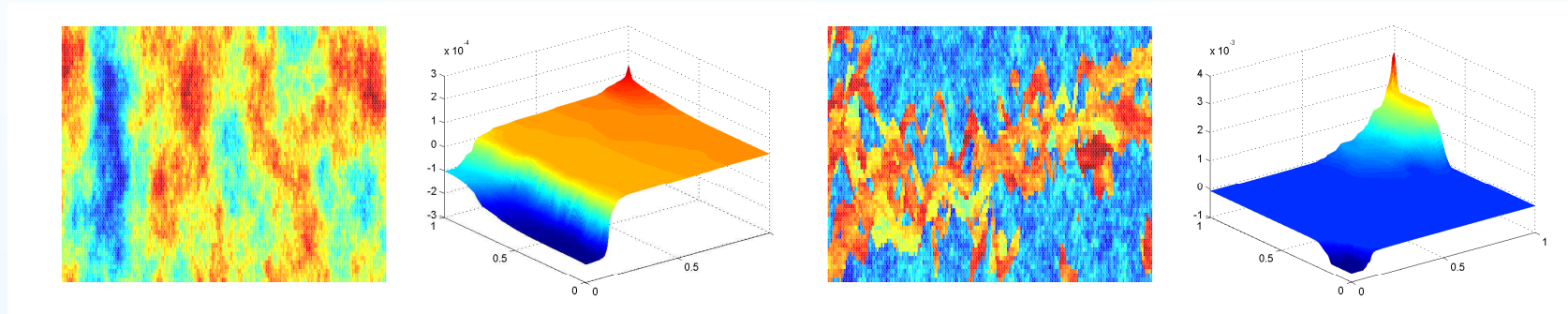
$$\left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\sigma - (\sigma_c + T_\sigma \sigma_c)) \right\|^2 \leq C \sum_i (\rho_{\omega_i}^2(\sigma_c) + \rho_{\partial\omega_i}^2(\sigma_c))$$

$$\rho_{\omega_i}^2(\sigma_c) = \sum_{\tau \in \mathcal{T}(\omega_i)} h_\tau^2 \|q\psi_i + \nabla \cdot \sigma_c^i(\phi_i + T_\sigma \phi_i)\|_{L^2(\tau)}^2 + h_\tau \|[t \cdot \sigma_c^i T_\sigma \phi_i]\|_{L^2(\partial\tau)}^2$$

$$\rho_{\partial\omega_i}^2(\sigma_c) = H_{\omega_i} \|[t \cdot \sigma_c^i T_\sigma \phi_i]\|_{L^2(\partial\omega_i)}^2$$

Numeriskt exempel på adaptivitet

Lager 1 och 50 i *SPE comparative solution proj.* (log skala) och plot av trycket, $q = 1$ uppe till höger $q = -1$ nere till vänster.



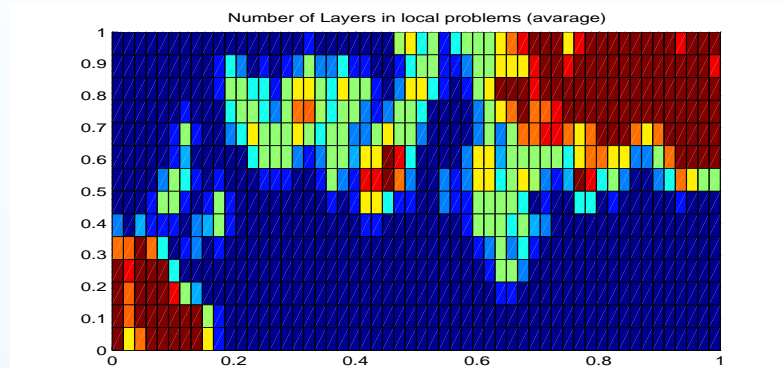
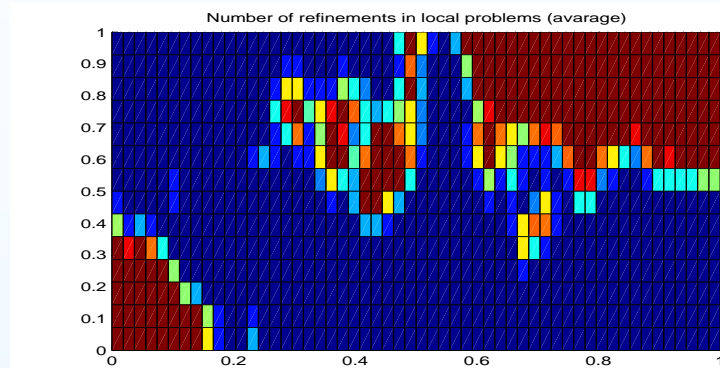
Adaptiv algoritm.

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{a}} (\sigma - (\sigma_c + T_\sigma \sigma_c)) \right\|^2 \leq C \sum_i (\rho_{\omega_i}^2(\sigma_c) + \rho_{\partial\omega_i}^2(\sigma_c))$$

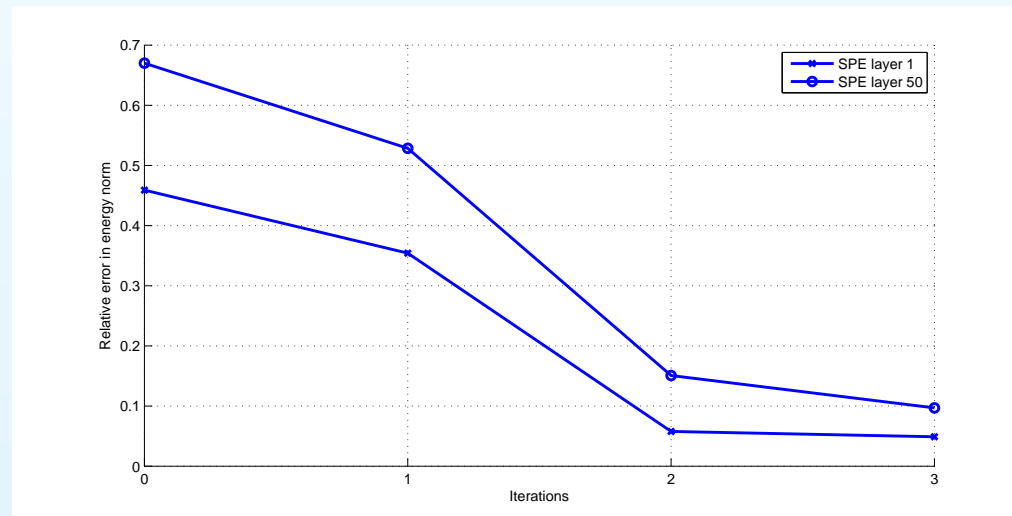
- Givet grovt nät 55×15 och lokala $h = H/2$ och $L = 1$.
- Beräkna multiskalbasfunktioner $\phi_i + T_\sigma \phi_i$ och därefter σ_c .
- Beräkna $\rho_{\omega_i}^2(\sigma_c)$ och $\rho_{\partial\omega_i}^2(\sigma_c)$.
- Förfina h lokalt och utöka L (30%), starta om eller stanna.

Förfiningar, lager och konvergens

Förfiningar (vänster) och lager (höger)



Vi beräknar skillnad i energinorm mellan multiskalllösningen och referenslösningen.



M. *Multiscale methods for elliptic problems*, skickad SIAM MMS

Sammanfattning

- *Numerisk approximation av modellproblem med FEM:* Existens, rumsdiskretisering, konvergens, felanalys och adaptivitet.
- *Multifysikproblem, Joule heating:* Fokus på teoretiska resultat som existens, standardteorin är till hjälp men nya resultat krävs, teorin påverkar den numeriska metoden, adaptivitet fortfarande öppet problem.
- *Multiskalproblem, oljereservoarsimulering:* Fokus på metodutveckling, multiskalbasfunktioner som kan återanvändas genom beräkningen, adaptivitet, konvergens är öppen fråga.

"Computers are incredibly fast, accurate and stupid. Human beings are incredibly slow, inaccurate and brilliant. Together they are powerful beyond imagination." Einstein