CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Primtalssatsen

Två olika bevis

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet

Johan Davegård
Tobias Magnusson
Feras Mofleh

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2016

Primtalssatsen

Två olika bevis

Examensarbete för kandidatexamen i matematik vid Göteborgs universitet
Tobias Magnusson

Examensarbete för kandidatexamen i matematik inom matematikprogrammet vid Göteborgs universitet
Johan Davegård Feras Mofleh

Handledare: Julia Brandes Per Salberger
Examinator: Maria Roginskaya

Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Göteborgs universitet
Göteborg 2016

Populärvetenskaplig presentation

Bakgrund

Vad är ett primtal? De flesta personer har säkert memorerat mantrat “ett primtal är ett tal som bara är delbart med 1 och sig själv”, men kanske inte funderat mycket mer på det än så. Primtal är dock oerhört viktiga för om vi istället definierar primtal som “icke sammansatta tal” och sammansatta tal som “tal som kan skrivas som en produkt av två tal som båda är större än 1” blir det tydligt att varje tal består av primtal. Låt oss ta 105 som ett exempel. Man ser ganska fort att

$$105 = 3 \times 35.$$

Här är 3 ett primtal, och 35 ett sammansatt tal, som på samma sätt kan delas upp

$$35 = 5 \times 7.$$

Här är både 5 och 7 primtal. Så

$$105 = 3 \times 5 \times 7.$$

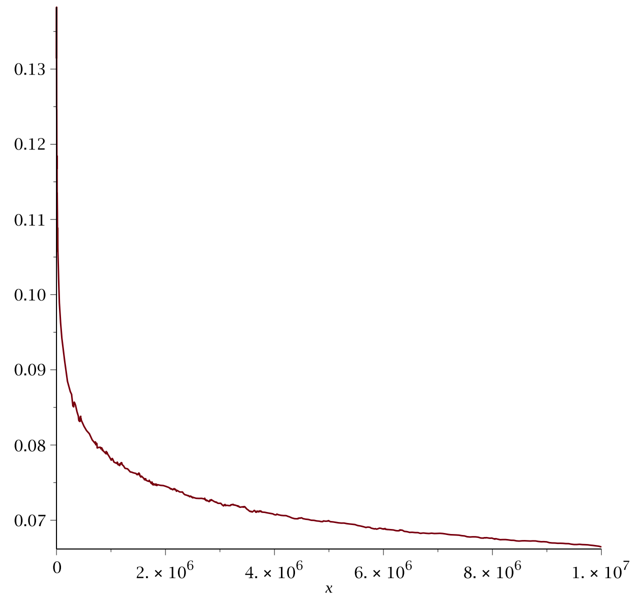
Nu finns bara primtal kvar, och vi har alltså demonstrerat att 105 består av primtal. Det faktum att alla tal består av primtal kallas för aritmetikens fundamentalsats. Att studera primtal är alltså precis lika viktigt som att studera grundämnen inom kemin. Precis som det är intressant att hitta alla grundämnen kan det vara intressant att hitta alla primtal, men är detta ens möjligt? Svaret är, nej! Euklides av Alexandria bevisade nämligen c. 300 f. v. t. att det finns oändligt många primtal. Men vi kan precisera oss något, och istället fråga hur många primtal finns det som är mindre än ett givet tal. Man sökte svaret länge och har ännu inte fått ett exakt svar. Ett approximativt svar gavs dock på sent 1700-tal, men det tog nästan 100 år att bevisa att det stämde. Resultatet kallas numera kort och gott för **primtalssatsen**.

Primtalssatsen

För att förenkla diskussionen inför vi en beteckning.

$$\pi(x) = \text{antal primtal som är mindre än eller lika med } x$$

x	$\pi(x)$	$x/\ln(x)$	fel	relativt fel
100	25	21.7	3.3	13.1%
1000	168	144.8	23.2	13.8%
10000	1229	1085.7	143.3	11.7%
100000	9592	8685.9	906.1	9.4%
1000000	78498	72382.4	6115.6	7.8%
10000000	664579	620420.7	44158.3	6.6%



Det relativa felet som funktion av x.

Symbolen π är den samma som används för $3.14159\ldots$ men i detta fallet betecknar den en *funktion*. Primtalssatsen är påståendet att

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln(x)},$$

där $\ln(x)$ är den naturliga logaritmen, samt att det relativa felet mellan $\pi(x)$ och $\frac{x}{\ln(x)}$ kommer närmare 0 ju större x blir. Vi visar approximationen, felet, och det relativa felet i nedan tabell och graf.

I vår uppsats bevisar vi primtalssatsen på två olika sätt. Dels på det klassiska sättet som har anor till en memoar författad 1859 av Bernhard Riemann, och dels på det pretentiösa sättet som utvecklats av Andrew Granville och Kannan Soundararjan under de senaste tio åren.

Det klassiska sättet bygger på komplexanalys – studiet av derivator och integraler av funktioner av komplexa tal, det vill säga tal med en realdel och en imaginärdel. Komplexanalys är en kraftfull metod för att t.ex. studera nollställen till funktioner. Det klassiska beviset använder den så kallade zeta-funktionen, vars nollställen används för att ge en formel för en funktion besläktad med $\pi(x)$. Primtalssatsen erhålls sedan genom en noggrann uppskattning av formeln.

Det pretentiösa sättet använder sig också av komplexanalys men innehåller därtill en generell teori för “avstånd” mellan en viss typ av funktioner definierade på de naturliga talen. Kärnan i det pretentiösa beviset ligger i Halász sats, som ger en uppskattning i termer av “avståndet” av “små” funktioner av denna typ. Med Halász sats kan man begränsa medelvärdet av en funktion som kallas Möbius-funktionen. Man kan visa att detta medelvärde är besläktat med ett annat medelvärde som i sin tur är besläktat med $\pi(x)$. På så sätt erhåller man primtalssatsen.

Man kan fråga sig varför två olika bevis behövs, och för att förklara det behöver vi tala lite om *feltermer*.

Feltermer

Man kan bevisa primtalssatsen med olika uppskattningar på felet mellan $\pi(x)$ och $\frac{x}{\log(x)}$ och naturligtvis vill man få felet så litet som möjligt. Helge von Koch bevisade 1901 att det finns en bästa felterm och att existensen av denna är ekvivalent med Riemannhypotesen – en ganska invecklad hypotes ställd av den ovan nämnda Bernhard Riemann om beteendet av nollställena till zeta-funktionen. Den intresserade läsaren ombedes läsa *Introduction to Analytic Number Theory* av Tom Apostol, för mer detaljer.

Den bäst kända feltermen kunde länge endast erhållas med Riemanns metoder, men med en artikel författad 2013 av Dimitris Koukoulopoulos förändrades detta. Han visade att Granvilles och Soundararajans metoder är tillräckliga för att erhålla den bäst kända feltermen.

Syftet med vår uppsats är att ge en förklaring av båda angreppssätten och därmed synliggöra skillnaderna och likheterna mellan det klassiska och det pretentiösa sättet.

Vidare kan man med Koukoulopoulos resultat ifrågasätta den centrala roll som Riemanns metoder har och har haft inom den analytiska talteorin. Om de inte är nödvändiga för att erhålla den bäst kända feltermen, är de kanske inte nödvändiga för andra resultat heller? Kanske finns det öppna problem inom talteorin som bäst löses med pretentiösa metoder?

Sammanfattning

Denna rapport är ett kandidatarbete i matematik, och specifikt analytisk talteori. Till en början introducerar vi notationerna som behövs för grundläggande analytisk talteori, och därefter presenterar vi ett bevis av primtalssatsen på två sätt. Först på det klassiska sättet, och därefter på det nyare "pretentiösa" sättet. I det klassiska sättet formuleras först primtalssatsen på ett annat sätt och detta används sedan tillsammans med Perrons formel för att göra primtalssatsen till ett analytiskt påstående som kan bevisas med residykalkyl och uppskattningar. Detta utgör den senare och största delen av det klassiska beviset. Därefter introduceras det pretentiösa sättet och till det relevanta satser ur elementär talteori. Sedan görs uppskattningar och ett påstående som är ekvivalent med primtalssatsen bevisas genom Halász sats. Slutligen erhålls primtalssatsen med två olika feltermer, där den klassiska är asympotiskt mindre än den pretentiösa.

Abstract

The following is a bachelor thesis in mathematics, and in particular analytic number theory. We begin by introducing the notations needed in basic analytic number theory, and continue by presenting a proof of the prime number theorem in two different ways. First, the classical way, and then the newer “pretentious” way. The classical way begins with a formulation of the prime number theorem in a different way and this is then used together with Perron’s formula in order to make the prime number theorem an analytical statement that can be proven with residue calculus and estimation. This constitutes the latter and largest part of the classical proof. We then introduce the pretentious way and with that relevant theorems from elementary number theory. After that we carry out estimations and prove a statement equivalent to the prime number theorem by using Halász’ theorem. Finally we obtain the prime number theorem with two different error terms, of which the classical error term is asympotically smaller than the pretentious error term.

Innehåll

Förord

Detta är ett kandidatarbete i matematik vid Göteborgs universitet gjort av Johan Davegård, Tobias Magnusson, och Feras Mofleh.

Syfte

Vi ämnar att ge en introduktion till analytisk talteori och dess mest kända resultat, primtalssatsen, på en nivå som passar tredjeårsstudenter i matematik eller liknande. En introduktion till de begrepp som är nödvändiga för att förstå de grundläggande metoderna i analytisk talteori ges och därför antas läsaren endast ha en god grund i komplex analys och elementär talteori. Vidare saknas för nuvarande en introduktion på kandidatnivå till Granville och Soundararajans pretentiösa metoder, del två fyller detta tomrum.

Avgränsningar

Vi begränsar oss till feltermer som inte är de bäst kända ty att ge ett bevis för dessa skulle innebära en onödigt teknisk rapport utan att bidra till större förståelse för ämnet. Av samma anledning ges inget bevis av Halász sats.

Metod och genomförande

Rapporten har tagits fram genom litteraturstudier och övningar. Litteraturstudier har bestått i att fylla i bevisdetaljer och förtydliga källornas argument.

Disposition

Rapporten är indelad i två delar. Den första täcker det klassiska beviset och nödvändig teori för att förstå det. Den andra täcker det pretentiösa beviset och nödvändig teori för att förstå det.

Författarnas ansvarsområden

Johan Davegård har haft ansvaret för det klassiska beviset. Tobias Magnusson och Feras Mofleh har haft ansvaret för det pretentiösa beviset. Vi har tagit gemensamt ansvar för inledning, förord, och gemensam notation. Det har förts en dagbok och individuella tidsloggar.

Slutligen vill vi tacka Julia Brandes och Per Salberger för handledningen och idén till projektet.

Kapitel 1

Inledning och notation

1.1 Inledning

Primtal har fascinerat människan i över två tusen år. Omkring 300 f.v.t. bevisade Euklides av Alexandria att det finns oändligt många primtal [9, bok 9, prop. 20]. Sedan dess har matematiker ställt sig frågor angående primtalens fördelning, frågor som inte är helt enkla att besvara, men som denna uppsats ämnar klarlägga något. År 1737 gav Leonhard Euler ett bevis av Euklides resultat som var av en helt annan karaktär [5, s. 173] än det ursprungliga beviset. Med dagens mått mätt är Eulers bevis inte tillräckligt rigoröst, då det är en manipulation av en kvantitet vi sedan tidigare vet är oändlig. När vi senare i uppsatsen använder (1.1.1) nedan, ger vi därför först ett rigoröst bevis. Det viktiga är dock idén, att använda analytiska metoder för att bevisa resultat om primtal. Det är just den idén som ligger till grund för de flesta bevis av uppsatsens huvudämne, **primtalssatsen**. Vi återger nu Eulers bevis med modern notation.

Betrakta följande summa

$$N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots,$$

det är allmänt känt att den är oändligt stor. Vi får nu att

$$\frac{1}{2}N = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots,$$

där nämnarna traverserar alla multipler av två. Detta ger att

$$N - \frac{1}{2}N = N\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots,$$

där nämnarna traverserar alla naturliga tal som inte är multipler av 2. Vi fortsätter

$$N\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \dots,$$

nu traverserar nämnarna alla naturliga tal som är multipler av 3 men inte av 2. Detta ger att

$$N\left(1 - \frac{1}{2}\right) - N\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = N\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \dots,$$

där nämnarna traverserar alla naturliga tal som varken är multipler av 3 eller 2. Fortsätter vi att "sila" bort alla primtalsmultipler på detta vis får vi

$$N\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\cdots = 1,$$

ty 1 är det enda tal som inte är en primtalsmultipel. Det gäller alltså att

$$N = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\dots},$$

vilket med produkt- och summanotation kan skrivas som

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \prod_{p} \frac{1}{1-\frac{1}{p}}. \tag{1.1.1}$$

Anta att det finns ett ändligt antal primtal, då är produkten ändlig, men då är summan ändlig, vilket är en motsägelse.

1.1.1 Primtalssatsen

För att kunna förklara vad primtalssatsen är behöver vi precisera vår tidigare frågeställning och istället ställa följande fråga.

Hur många primtal finns det som är mindre än ett givet tal?

Om vi låter $\pi(x)$ beteckna antalet primtal mindre än eller lika med x övergår frågan till

Vilket värde har $\pi(x)$ för ett reellt tal x?

T.ex. så finns det fyra primtal mindre än eller lika med tio, nämligen 2, 3, 5 och 7. En exakt formel för $\pi(x)$ har man inte kunnat ge, men man har kunnat ge ganska bra gissningar. Gissningarna görs med så kallad **asympotisk** likhet, vilken definieras nedan.

Definition. Funktionen $f(x)$ säges vara asympotiskt lika med $g(x)$ om

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Detta betecknas

$$f(x) \sim g(x).$$

Adrien Marie Legendre gissade i *Essai sur la théorie des nombres* publicerad 1808 [13, s. 18] att

$$\pi(x) = \frac{x}{A\log x + B(x)}$$

där $A = 1$ och $\lim_{x\to\infty} B(x) \approx -1.08366$. Carl Friedrich Gauss påstâd i sin tur i ett brev 1849 [6, s. 447] att han 1792 eller 1793 gissat

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.$$

Det skulle senare visa sig att Legendres gissning inte riktigt stämde, men att Gauss hade gissat rätt. År 1896 gjorde Jacques Hadamard [8], och Charles de la Vallée Poussin [3] oberoende av varandra Gauss förmodande till en sats.

Sats (Primtalssatsen)**.** Det gäller att

$$\pi(x) \sim \mathrm{li}(x), \tag{1.1.2}$$

där

$$\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.$$

Ibland uttrycks primtalssatssen som

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

vilket vi senare ska se är ekvivalent med (1.1.2).

Viktigare än deras bevis var vägen dit. Båda bevisen byggde på de ideér som Bernhard Riemann introducerade 1859 i memoaren *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [15]. I fokus var zeta-funktionen.

Definition. Låt s vara ett komplext tal med realdel större än 1. Vi låter

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

där ζ utläses "zeta".

Riemann kunde analytiskt fortsätta zeta-funktionen till alla komplexa s, bevisa att zeta-funktionen uppfyller en viss *funktionalekvation*, och ge en formel för en funktion besläktad med $\pi(x)$ i termer av zeta-funktionens nollställen. För att kunna åstadkomma detta utnyttjade han metoder från både komplexanalys och fourieranalys. Primtalssatsen övergick till ett analytiskt påstående som kunde bevisas med förbättrade uppskattningar. Det var precis det senare som Hadamard och de la Vallée Poussin stod för.

I samma memoar förmodade Riemann att alla nollställen till zeta-funktionen antingen är negativa jämna heltal, de så kallade triviala nollställena, eller har realdelen $\frac{1}{2}$, de icke-triviala nollställena. Detta förmodande går under namnet *Riemann-hypotesen* och saknar tusentals försök till trots fortfarande bevis. Vad som däremot är känt är att alla icke-triviala nollställen har realdel mellan 0 och 1.

1.1.2 Feltermer

Även om primtalssatsen ofta formuleras som (1.1.2) är det numera vanligare att ge den på den starkare formen

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + \mathrm{ERR}(x),$$

där

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{ERR}(x)}{\mathrm{li}(x)} = 0.$$

Funktionen $\mathrm{ERR}(x)$ beskrivs med stort ordo och kallas *felterm*. Den första feltermen gavs 1899 av de la Vallée Poussin i en uppföljare [4] till artikeln han publicerade 1896. Han erhöll

$$\mathrm{ERR}(x) = O\left(x \exp(-a\sqrt{\log x})\right), \tag{1.1.3}$$

där a är en positiv konstant. Det är också denna vi ger ett bevis av i vår klassiska del. Man vill helst ha en felterm sådan att $\mathrm{ERR}(x)/\mathrm{li}(x)$ går så fort som möjligt mot 0, Helge von Koch visade nämligen 1901 [18] att Riemann-hypotesen är ekvivalent med att

$$\mathrm{ERR}(x) = O\left(\sqrt{x}\log x\right). \tag{1.1.4}$$

Löst uttryckt kan man säga att ju närmare (1.1.4) man kommer, desto närmare kommer man till ett bevis av Riemannhypotesen. Den bäst kända feltermen som inte beror på Riemann-hypotesen erhölls först av Vinogradov[17] och Korobov[10] oberoende av varandra 1958. Den är

$$\mathrm{ERR}(x) = O\left(x \exp(-a(\log x)^{\frac{3}{5}})\right), \tag{1.1.5}$$

där a är en positiv konstant. Då beviset av (1.1.5) är invecklat och inte bidrar till större förståelse har vi valt inte behandla det.

Det har visat sig att $\pi(x)$ inte är helt enkel att arbeta med, och därför formuleras primtalssatsen ibland med hjälp av en annan funktion, $\psi(x)$. Det gäller att

$$\psi(x) = x + \mathrm{ERR}(x),$$

där $\lim_{x\to\infty} \mathrm{ERR}(x)/x = 0$, om och endast om primtalssatsen är sann.

1.1.3 Klassiskt bevis

I den klassiska delen följer vi upplägget i [2] och bevisar tre viktiga resultat för att komma fram till primtalssatsen. För att bevisa dessa behövs goda kunskaper om hur zeta-funktionen beter sig, framförallt i området $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$. Det första resultatet ger en uppskattning på hur många nollställen det finns i detta område upp till någon viss höjd T på imaginäraxeln. Riemann gissade att detta antal var

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$

vilket bevisades av von Mangoldt 1905 [2]. Resultat nummer två säger något om var zeta-funktionen är nollskild nära $\mathrm{Re}(s) = 1$. Mer specifikt att zeta-funktionen är nollskild till vänster om $\mathrm{Re}(s) = 1$ i ett område vars bredd är proportionellt mot $(\log t)^{-1}$, där $t = \mathrm{Im}(s)$, vilket bevisades av de la Vallée Poussin 1899 [4]. Slutligen bevisar vi att funktionen $\psi(x)$ uppfyller den explicita formeln

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\rho}\frac{x^{\rho}}{\rho} - \frac{1}{2}\log(1 - x^{-2}),$$

där ρ löper över alla icke-triviala nollställen till $\zeta(s)$. Detta resultat erhålls med hjälp av residykalkyl och Perrons formel, en sats som ger uppskattningar av en specifik typ av linjeintegraler. Med hjälp av dessa tre resultat bevisar vi primtalssatsen, med feltermen (1.1.3).

Bevis av vissa viktiga resultat som används har utlämnats, då dessa är mer allmänna än det vi vill åstadkomma här. Dessa inkluderar Stirlings formel för Gamma-funktionen och teori om Riemann-Stieltjes integralen. Referenser till dessa ges för den intresserade läsaren.

1.1.4 Pretentiösa metoder

I den senare delen av uppsatsen bevisar vi primtalssatsen på ett sätt som i någon mening är det rakt motsatta till det Riemann stakade ut i [15]. Riemanns metod går ut på att utnyttja zeta-funktionens egenskaper i området där $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ och på så sätt erhålla primtalssatsen. Metoden i den senare delen av rapporten utnyttjar däremot zeta-funktionens egenskaper endast i området där $\mathrm{Re}(s) > 1$ men erhåller likväl primtalssatsen. Den är en del av nytt synsätt inom analytisk talteori som formulerats av Andrew Granville och Kannan Soundararajan – det så kallade *pretentiösa* synsättet. Vi citerar från [7], som också är vår huvudsakliga källa.

> Until now there has been no other coherent approach that was capable of addressing all of the central issues of analytic number theory. In this book we present the pretentious view of analytic number theory; allowing us to recover the basic results of prime number theory without use of zeros of the Riemann zeta-function and related L-functions, and to improve various results in the literature.
>
> ([7, s. 3])

Termen "pretentiös" kommer från engelskans "pretentious", och har sitt ursprung i att metoden utnyttjar att vissa funktioner av de naturliga talen tycks utgöra sig för något annat än vad de egentligen är – de låtsas (engelska, pretend) vara något annat. Kärnan i metoden, Hálasz sats, ger en uppskattning av medelvärdet till funktioner i termer av deras pretentiösa avstånd till funktionen $f(n) = n^{i\alpha}$. Med detta och ett antal välkända asymptotiska resultat kan primtalssatsen erhållas. Vi bevisar specifikt att

$$\psi(x) = x + O\left(\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15}\right)$$

vilket inte är lika bra som (1.1.3), men med mer möda kan man bevisa (1.1.4) vilket Dimitris Koukoulopoulos gjorde 2013 i [11]. Detta leder till en intressant frågeställning.

> Om man inte behöver använda Riemanns taktik för att reproducera Vinogradovs och Korobovs resultat, är det då möjligt att det pretentiösa synsättet är starkt nog att bevisa Riemannhypotesen, eller lösa andra öppna problem inom den analytiska talteorin?

Vi kan naturligtvis inte besvara denna fråga, men vi hoppas att den någon gång får ett svar.

1.1.5 Läsguide

Denna kandidatuppsats består av två i stort sett oberoende delar. Den läsare som endast intesserar sig för en av delarna kan utan problem välja att bara läsa denna. Av ett antal skäl finns även en appendix där vi valt att lägga en del resultat som antingen bara används flyktigt på vägen, eller som är för allmänna för att pedagogiskt passa in i någon av de två delarna. Dessutom har vi valt att lägga bevis till några resultat där, för att läsaren lättare ska kunna ta till sig och förstå de viktiga delarna i bevisen. Författarna har strävat efter att vara så fullständiga i sin redogörelse som möjligt och därför finns bevis till nästan alla använda satser. När bevis saknas ges referens till detta för läsaren att söka upp.

1.2 Notation

I följande uppsats betecknar p alltid primtal, och $\log x$ betecknar alltid den naturliga logaritmen.

1.2.1 Asymptotisk notation

Vi använder följande asympotiska notationer. Låt $f, g : M \to \mathbb{C}$ där $M \subset \mathbb{C}$ vara godtyckliga funktioner och låt K vara en positiv konstant. Då gäller

$$
\begin{aligned}
&f(s) = O(g(s)) \Leftrightarrow \exists K > 0.\, \exists x_0 \in \mathbb{N}.\, \forall |s| > x_0.\, |f(s)| \leq K|g(s)|,\\
&f(s) = o(g(s)) \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0,\\
&f(s) \ll g(s) \Leftrightarrow f(s) = O(g(s)),\\
&f(s) \gg g(s) \Leftrightarrow g(s) \ll f(s),\\
&f(s) \asymp g(s) \Leftrightarrow f(s) \ll g(s) \text{ och } g(s) \ll f(s).
\end{aligned}
$$

1.2.2 Funktioner

Det finns ett antal återkommande funktioner

$$
\begin{aligned}
&\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\\
&\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1,\\
&\tau(n) = \sum_{d|n} 1,\\
&\mu(n) = \begin{cases} 0 \text{ om } p^2 \mid n,\\ (-1)^r \text{ om } n \text{ är en produkt av } r \text{ distinkta primtal},\\ 1 \text{ om } n = 1,\end{cases}\\
&\Lambda(n) = \begin{cases} \log p \text{ om } n = p^k,\ \text{för något } k \in \mathbb{N},\\ 0 \text{ annars},\end{cases}\\
&\mathbb{1}(n) = 1,\ \text{för alla } n \in \mathbb{N},\\
&\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ om } n = 1,\\ 0 \text{ annars},\end{cases}\\
&\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n),\\
&M(x) = \sum_{n\leq x} \mu(n),\\
&\mathrm{li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.
\end{aligned}
$$

Av dessa är τ, μ, Λ, $\mathbb{1}$, och δ aritmetiska funktioner, d. v. s. funktioner definierade på de naturliga talen. En aritmetisk funktion f sägs vara multiplikativ om $f(ab) = f(a)f(b)$ då a och b är relativt prima.

1.2.3 Övrig notation

Vi använder

$$
\begin{aligned}
&\lfloor x \rfloor = \text{ största heltal mindre än eller lika med } x,\\
&\{x\} = x - \lfloor x \rfloor.
\end{aligned}
$$

Kapitel 2

Ett klassiskt bevis

Vi kommer i denna del att ge ett klassiskt bevis av primtalssatsen. Klassiskt därför att det ligger nära hur både de la Vallée-Poussin och Hadamard gick tillväga. Upplägget ligger nära det i [2], vilket varit den främsta källan.

2.1 Primtalssatsen och ekvivalenta påståenden

I inledningen hävdade vi att primtalssatsen kan uttryckas både som $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$ och $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Detta påstående följer enkelt med hjälp av partiell integration. Vi har att

$$\mathrm{li}(x) = \left[\frac{t}{\log t}\right]_2^x + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{(\log t)^2} = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right)$$

så om $\frac{\pi(x)\log x}{x} \to 1$ då $x \to \infty$ så måste även $\frac{\pi(x)}{\mathrm{li}(x)} \to 1$ då $x \to \infty$. Vi nämner ännu ett ekvivalent påstående till primtalssatsen, som använder funktionen $\psi(x)$ istället, då det i första hand är denna som kommer användas: $\frac{\psi(x)}{x} \to 1$ då $x \to \infty$. Det är en ganska enkel övning i partiell summation (se proposition A.1.1) att inse att dessa påståenden är ekvivalenta, men vi väntar med det till kapitel 2.4 då det ger oss mer att visa det där.

2.2 Egenskaper hos ζ

Vi börjar nu med att lägga grunden till delarna som behövs i beviset. $\zeta(s)$ kommer att användas väldigt mycket och vi behöver därför god kunskap om hur denna beter sig. Vi börjar med en konvention och låter $s = \sigma + it$.

2.2.1 Eulers produktformel

Vi ska nu se ett sätt som $\zeta(s)$ är relaterat till primtal på. Euler bevisade att ζ kan skrivas som en produkt över primtalen,

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}, \qquad \sigma > 1. \tag{2.2.1}$$

Bevis. Vi börjar med att inse att $\zeta(s)$ är absolutkonvergent för $\mathrm{Re}(s) > 1$, och att vi dessutom kan skriva

$$\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}},$$

som en geometrisk serie. Vi har alltså att

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}\right).$$

För ett givet primtal P kan vi av aritmetikens fundamentalsats skriva

$$\prod_{p\leq P}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p^{ks}}\right)=\sum_{n}\frac{1}{n^s},$$

där summan i högerledet löper över alla n som har samtliga delare $p \leq P$. Vi väljer nu N så att

$$\sum_{n\geq N}\left|\frac{1}{n^s}\right|<\epsilon$$

och vi får således att

$$\left|\zeta(s)-\prod_{p\leq N}\frac{1}{1-p^{-s}}\right|\leq\sum_{n\geq N}\left|\frac{1}{n^s}\right|<\epsilon,$$

vilket bevisar påståendet. □

2.2.2 Analytisk fortsättning av ζ och funktionalekvationen

I detta avsnitt ska vi bevisa två resultat om $\zeta(s)$, först bevisade av Riemann.

Analytisk fortsättning

Lemma 2.2.1. För $x > 0$ gäller det att

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2\pi/x}=\sqrt{x}\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2\pi x},$$

eller med $\theta(x)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}e^{-n^2\pi x}$

$$\sqrt{x}\theta(x)=\theta(1/x). \tag{2.2.2}$$

Bevis. Se appendix A.8. □

Vi ska nu härleda funktionalekvationen för $\zeta(s)$.

Sats 2.2.1. $\zeta(s)$ uppfyller funktionalekvationen

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\tfrac{1}{2}s)\zeta(s)=\pi^{-\frac{1}{2}(1-s)}\Gamma[\tfrac{1}{2}(1-s)]\zeta(1-s). \tag{2.2.3}$$

Bevis. Betrakta

$$\Gamma(\frac{1}{2}s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\frac{1}{2}s-1}\mathrm{d}t$$

och sätt $t = \pi n^2 x$. Vi får

$$\Gamma(\frac{1}{2}s)=\int_0^\infty e^{-\pi n^2x}(\pi n^2x)^{\frac{1}{2}s-1}d(\pi n^2x)=\int_0^\infty e^{-\pi n^2x}\pi^{\frac{1}{2}s}n^sx^{\frac{1}{2}s-1}\mathrm{d}x.$$

Efter omflyttning har vi

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}n^{-s}\Gamma(\frac{1}{2}s)=\int_0^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}e^{-\pi n^2x}\mathrm{d}x.$$

Om vi låter $\sigma > 1$ och summerar över n har vi att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)=\int_0^\infty x^{\ \frac{1}{2}s-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}\right)\mathrm{d}x$$

vilket gäller eftersom vänsterledet konvergerar. Låt nu summan i vänsterledet betecknas med $\omega(x)$, dvs. $\omega(x)=\sum\limits_{1}^{\infty}e^{-n^2\pi x}$.

Vi får således att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s)=\int_0^\infty x^{\ \frac{1}{2}s-1}\omega(x)\mathrm{d}x.$$

Vi delar upp integralen i två intervall,

$$\int_0^1 x^{\frac{1}{2}s-1}\omega(x)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\omega(x)\mathrm{d}x,$$

och observerar att vi kan låta den första integralen ha samma gränser som den senare, genom variabelbytet $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Vi får då

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1}\omega(1/x)\mathrm{d}x + \int_1^\infty x^{\frac{1}{2}s-1}\omega(x)\mathrm{d}x.$$

Vi observerar här att då $\omega(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2\pi x}$ så har vi att

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2\pi x} = 2\omega(x) + 1.$$

Från lemma 2.2.1 ovan har vi att $\theta(1/x) = \sqrt{x}\theta(x)$ och vi får att

$$\omega(1/x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x).$$

Låter vi detta uttryck ersätta $\omega(1/x)$ i den högra integralen ovan får vi

$$\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x}\omega(x)\right)\mathrm{d}x = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\omega(x)\mathrm{d}x.$$

Tillsammans får vi att

$$\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty \left(x^{\frac{1}{2}s-1} + x^{-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}}\right)\omega(x)\mathrm{d}x. \tag{2.2.4}$$

Vi observerar att högerledet är detsamma för s som för $1-s$, varav satsen följer. $\square$

Anmärkning 2.2.1. Genom att använda egenskap (d) i proposition A.2.1 får vi att

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s). \tag{2.2.5}$$

Sats 2.2.2. $\zeta(s)$ är meromorf i högra halvplanet, dvs. för $\sigma > 0$, med $s = 1$ som enda enkel pol med residy 1.

Bevis. Vi utgår från definitionen och kan skriva

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} = \left(\frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{2}{2^s} - \frac{2}{3^s}\right) + \left(\frac{3}{3^s} - \frac{3}{4^s}\right)\ldots \\ &= \sum_{n=1}^\infty n\left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right) = s\sum_{n=1}^\infty n\int_n^{n+1} x^{-s-1}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

där sista likheten följer från integralkalkylens huvudsats. Vi låter nu $\lfloor x\rfloor$ ersätta n och kan göra oss av med summan och skriva

$$s\int_1^\infty \lfloor x\rfloor x^{-s-1}\mathrm{d}x.$$

Ersätter vi $\lfloor x\rfloor$ med $x - \{x\}$ får vi när vi integrerar ena termen i integranden att

$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \{x\}x^{-s-1}\mathrm{d}x. \tag{2.2.6}$$

Av detta ser vi att satsen följer. $\square$

$\xi(s)$ och några första uppskattningar

Definition 2.2.1. Vi definierar nu

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}\Gamma(\frac{1}{2}s)\zeta(s) \tag{2.2.7}$$

och ser att ξ uppfyller funktionalekvationen $\xi(s) = \xi(s-1)$ enligt (2.2.3) och (d) i proposition A.2.1.

Proposition 2.2.1. Det finns en konstant C så att $\lim_{|s|\to\infty} |\xi(s)| < e^{C|s|\log|s|}$.

Bevis. Vi observerar att då $\xi(s) = \xi(1-s)$ räcker det att visa olikheten för $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Vi har att

$$|\frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-\frac{1}{2}s}| < e^{C|s|}$$

för något positivt C (detta behöver inte vara samma vid varje tillfälle). Vidare, då $\sigma \geq \frac{1}{2}$ kan vi applicera Stirlings formel, proposition A.2.2, och får således

$$|\Gamma(\tfrac{1}{2}s)| < e^{C|s|\log|s|}.$$

Vidare, av (2.2.6) följer, för $\sigma \geq \frac{1}{2}$, att $|\zeta(s)| < C|s|$. Så

$$|\xi(s)| < e^{C|s|\log|s|}, \tag{2.2.8}$$

vilket skulle visas. □

Sats 2.2.3. Låt $\{\rho_n\}$ vara nollställen till $\xi(s)$. Då gäller att

$$\xi(s) = e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})e^{\frac{s}{\rho}} \tag{2.2.9}$$

för något val av reella konstanter A och B, samt att

$$\sum|\rho_n|^{-1-\epsilon}$$

är konvergent för varje $\epsilon > 0$, men

$$\sum|\rho_n|^{-1}$$

är divergent.

Anmärkning 2.2.2. De två sista påståendena medför speciellt att ξ har oändligt många nollställen.

Bevis. Se appendix A.8. □

Det senare resultatet i satsen kommer till användning först lite senare när vi vill hitta nollställen till $\zeta(s)$, men vi fortsätter här med några följder av (2.2.9).

Logaritmering av $\xi(s)$ ger

$$\log\xi(s) = \log\left(e^{A+Bs}\prod_{\rho}(1-\frac{s}{\rho})e^{\frac{s}{\rho}}\right) = A + Bs + \sum_n \log\left(1-\frac{s}{\rho_n}\right) + \frac{s}{\rho_n}.$$

Derivering ger nu

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_n \frac{1}{\rho_n} + \frac{\rho_n}{\rho_n - s}\frac{-1}{\rho_n}.$$

och vi har alltså kommit fram till att

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = B + \sum_n \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right). \tag{2.2.10}$$

Genom att betrakta den logaritmiska derivatan av (2.2.7) kan vi få en formel för $\zeta'(s)/\zeta(s)$. Vi har att

$$\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\log\pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)},$$

så

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} + \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}.$$

Kombinerat med (2.2.10) ovan får vi

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = B - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\log\pi - \frac{\Gamma'(\frac{1}{2}s+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}s+1)} + \sum_n \left(\frac{1}{s-\rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right). \tag{2.2.11}$$

2.2.3 Mer om $\log\zeta(s)$ och ζ'/ζ

Av (2.2.1) har vi att

$$\log\zeta(s) = \sum_p \log\frac{1}{1-p^{-s}} = -\sum_p \log(1-p^{-s}) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-sn}}{n} \tag{2.2.12}$$

för $\sigma > 1$, vilket inses med hjälp av potensserieframställningen

$$\log(1-z) = \sum \frac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.$$

Deriverar vi med avseende på s får vi $\zeta'(s)/\zeta(s)$, å ena sidan. Å andra sidan har vi att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\zeta(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{-sn}}{n}\right) = -\sum_p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{sn}} = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Lambda(m)}{m^s}.$$

Vi kan alltså dra slutsatsen att

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \tag{2.2.13}$$

för $\sigma > 1$.

Uppskattningar

Vi samlar här lite uppskattningar som kommer behövas senare. För $1/2 < \sigma < 2$ gäller att

$$\zeta(\sigma) = O\left(\frac{1}{\sigma-1}\right), \tag{2.2.14}$$

vilket inses direkt från (2.2.6). Vidare från detta eller (2.2.11) har vi att nära $s = 1$ så är

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = O\left(\frac{1}{s-1}\right) \tag{2.2.15}$$

och speciellt så gäller det att för $\sigma > 1$ så är

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} < \frac{1}{\sigma-1} + K \tag{2.2.16}$$

för någon positiv konstant K. Applicerar vi proposition A.2.2 på (2.2.11) så har vi att för något $A > 0$ att

$$-\operatorname{Re}\left[\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right] < A\log t - \sum_\rho \operatorname{Re}\left[\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right] \tag{2.2.17}$$

i området $t \geq 2$ och $1 \leq \sigma \leq 2$. Vi noterar också att $|\zeta'(s)/\zeta(s)| = O(\log t)$, om $\sigma > 1 + \frac{1}{\log t}$ och $t \geq 2$, ty

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} = \frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = O(\log t) \tag{2.2.18}$$

enligt (2.2.15). Till sist ger vi en uppskattning för $\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ i området $\sigma \leq -1$. Funktionalekvationen, (2.2.3), till $\zeta(s)$ kan skrivas som

$$\zeta(1-s) = \pi^{-\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}(1-s)}\zeta(s)\frac{\Gamma(\frac{1}{2}s)}{\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))} = \pi^{\frac{1}{2}-s}\zeta(s)2^{-s}\pi^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sin(\frac{\pi s}{2})}\frac{1}{\Gamma(1-s)}$$

med hjälp av (d) i proposition A.2.1. Vidare, av (b) i samma proposition får vi

$$\zeta(1-s) = 2^{-s}\pi^{1-s}\zeta(s)\Gamma(s)\frac{\sin(\pi s)}{\pi\sin(\frac{\pi s}{2})}$$

och slutligen utnyttjar vi att $\dfrac{\sin s}{\sin\frac{s}{2}} = 2\cos s$ och erhåller att

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s}\pi^{-s}(\cos\tfrac{1}{2}\pi s)\Gamma(s)\zeta(s).$$

Vi tar nu den logaritmiska derivatan av denna, och betraktar endast fallet då $\sigma \geq 2$, vilket med hjälp av funktionalekvationen ger oss uppskattning i det sökta området. Vi har att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\log\zeta(1-s) = -\frac{\pi}{2}\tan(\tfrac{1}{2}\pi s) + \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \log 2 - \log\pi$$

och vi ser att de två sista termerna är konstanta, och vållar alltså inget problem. Stirlings formel, proposition A.2.2, ger att Gamma-termen är $O(\log|s|)$. $\zeta(s)$ är begränsad här vilket kan inses genom den ursprungliga definitionen och konvergenstest. Då återstår alltså den första termen, och vi noterar att den har poler i de udda heltalen. Således kan vi dra slutsatsen att så länge $|s-(1+2n)| \geq \frac{1}{2}$ för varje $n \in \mathbb{Z}$ så är $\tan(\frac{1}{2}\pi s)$ begränsad. Ekvivalent, $\tan(\frac{1}{2}\pi s)$ är begränsad om $|(1-s)+2n| \geq \frac{1}{2}$, det vill säga om vi exkluderar bollar med radie $\frac{1}{2}$ runt de udda heltalen för s eller de jämna heltalen för $1-s$. Eftersom Gamma-termen är $O(\log|s|)$ för s får vi då att den är $O(\log 2|1-s|)$ för $1-s$ vilket ger att den är $O(\log 2|s|)$ om vi nu låter $s \leq -1$. Således har vi kommit fram till att

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = O(\log 2|s|) \tag{2.2.19}$$

för $\sigma \leq -1$ och $s \neq -2n$, $n \in \mathbb{N}$. Varför vi behöver exkludera omgivningar till de negativa jämna heltalen blir förhoppningsvis klart nedan.

2.2.4 Nollställen till $\zeta(s)$ och områden utan nollställen

Vi behöver veta något om nollställen till ζ för att senare kunna få bra uppskattningar för bl.a. $\psi(x)$. Vi börjar med att notera att jämna negativa heltal är nollställen. Anmärkning 2.2.1 säger att

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\Gamma(1-s)\zeta(1-s)$$

där $\sin\left(\dfrac{\pi s}{2}\right) = 0$ för $s = -2, -4, -6, ...$. Dessa kallas för de *triviala nollställena* till $\zeta(s)$. Vi observerar också att Γ har poler i icke-positiva heltal, så de potentiella nollställena $s = 0, 2, 4, ...$ upphävs. Lite mer intressant, som bevisades av Hadamard är följande resultat.

Sats 2.2.4. $\zeta(s)$ har oändligt många nollställen i området $0 \leq \sigma \leq 1$.

För att visa detta bevisar vi först följande lemma.

Lemma 2.2.2. De enda nollställena till $\xi(s)$ är de icke-triviala nollställena till $\zeta(s)$.

Bevis. (Av lemma) De triviala nollställena till ζ upphävs av $\Gamma(\frac{1}{2}s)$ som har poler i $0, -2, -4, ...$, så även nollstället i $s = 0$ från faktorn s upphävs. Vidare har ζ en pol i $s = 1$ som alltså upphäver nollstället till faktorn $s - 1$. Återstående nollställen till $\xi(s)$ måste därför vara de icke-triviala nollställena till $\zeta(s)$. $\square$

Bevis. (Av sats) Av lemma 2.2.2 och (2.2.1) har vi att om $\zeta(s)$ har icke-triviala nollställen måste de ligga i $0 \leq \sigma \leq 1$, ty om $\zeta(s) = 0$ för $\sigma > 1$ skulle det finnas primtal p så att någon faktor

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 0$$

vilket uppenbarligen är omöjligt då produkten konvergerar här. Men vi vet enligt sats 2.2.9 att ξ har oändligt många nollställen, vilket medför att ζ har oändligt många nollställen i området $0 \leq \sigma \leq 1$. $\square$

Detta motiverar nu följande definition.

Definition 2.2.2. Vi låter $N(T)$ beteckna antalet nollställen till $\zeta(s)$ i området $0 < \sigma < 1$, $0 < t < T$.

Vi ska strax bevisa en asymptotisk formel för $N(T)$, men först visar vi följande två lemman:

Lemma 2.2.3. Om $\rho = \beta + i\gamma$ löper över nollställena till $\zeta(s)$ så gäller för stora T att

$$\sum_{\rho} \frac{1}{1 + (T - \gamma)^2} = O(\log T). \tag{2.2.20}$$

Bevis. Av (2.2.17) har vi att

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A \log t - \sum_n \mathrm{Re}\left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right)$$

för någon konstant $A > 0$ i området $1 \leq \sigma \leq 2$ och $t \geq 2$. Vi låter $s = 2 + iT$. Då är $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ begränsad enligt (2.2.18), och vi har således att

$$\sum_n \mathrm{Re}\left[\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right] < A \log T$$

inte nödvändigtvis för samma A, ty summan är positiv:

$$\mathrm{Re}\frac{1}{s - \rho_n} = \frac{2 - \beta}{(2 - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} \geq \frac{1}{4 + (T - \gamma)^2}$$

och olikheten ger oss sökta resultat. $\square$

Två direkta konsekvenser av detta är att (i) antalet nollställen med $T - 1 < \gamma < T + 1$ är $O(\log T)$ och (ii) summan $\sum (T - \gamma)^{-2}$ över nollställena som inte satisfieras av (i) är också $O(\log T)$.

Lemma 2.2.4. För stora t skilda från imaginärdelarna till nollställena, och $-1 \leq \sigma \leq 2$, gäller det att

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_{\substack{n \\ |t - \gamma_n| < 1}} \frac{1}{s - \rho_n}.$$

Bevis. Vi betraktar differensen

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{\zeta'(2 + it)}{\zeta(2 + it)}$$

med hjälp av (2.2.11) och (2.2.18) och får att

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log t) + \sum_n \left(\frac{1}{s - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n}\right).$$

Vi behöver nu visa att de termer som inte uppfyller kravet $|t-\gamma_n|<1$ maximalt bidrar med $O(\log t)$. För termerna med $|\gamma_n - t| \geq 1$ gäller i det givna området att

$$\left|\frac{1}{s-\rho_n} - \frac{1}{2+it-\rho_n}\right| = \frac{2-\sigma}{|(s-\rho_n)(2+it-\rho_n)|} \leq \frac{3}{|\gamma-t|^2}.$$

Summan över dessa är enligt (ii) ovan $O(\log T)$ och de termer som uppfyller $|T-\gamma|<1$ är till antal också $O(\log T)$ enligt (i). □

Sats 2.2.5. För stora T gäller det att

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T). \tag{2.2.21}$$

Bevis. Låt R vara rektangeln med hörn i $2, 2+iT, -1, -1+iT$. Vi kan utan inskränkning anta att $\xi(\sigma+iT) \neq 0$ för $-1 \leq \sigma \leq 2$. Av argumentprincipen och lemma 2.2.2 har vi då att

$$2\pi N(T) = \int_R \frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\mathrm{d}s = \Delta_R \arg\xi(s),$$

det vill säga skillnaden i argument för $\xi(s)$ då s löper runt R. Vi noterar att då ξ är nollskild och endast antar reella värden för $s \in \mathbb{R}$, ändras inte argumentet på linjstycket mellan -1 och 2. Vidare har vi att då $\xi(s) = \xi(1-s)$ gäller det att

$$\xi(\sigma+it) = \xi(1-\sigma-it) = \overline{\xi(1-\sigma+it)}$$

vilket innebär att skillnaden i argument då s går från 2 via $2+iT$ till $\frac{1}{2}+iT$ är samma som från $\frac{1}{2}+iT$ via $-1+iT$ till -1. Om vi låter L beteckna linjestyckena från 2 till $\frac{1}{2}+iT$ via $2+iT$ får vi att

$$2\pi N(T) = 2\Delta_L \arg\xi(s) \iff \pi N(T) = \Delta_L \arg\xi(s).$$

Det återstår nu att beräkna $\Delta_L \arg\xi(s)$. Vi gör detta via definitionen för ξ, med en liten omskrivning, då vi noterar att $\frac{1}{2}s\Gamma(\frac{1}{2}s) = \Gamma(\frac{1}{2}s+1)$ enligt (a) i proposition A.2.1. Vi har alltså att beräkna

$$\Delta_L \arg\xi(s) = \Delta_L \arg(s-1) + \Delta_L \arg(\pi^{-\frac{1}{2}s}) + \Delta_L \arg\Gamma(\frac{1}{2}s+1) + \Delta_L \arg\zeta(s).$$

Vi börjar från vänster och har att

$$\Delta_L \arg(s-1) = \arg(\frac{1}{2}+iT-1) = \arg(-\frac{1}{2}+iT) = \pi + \arctan(-2T) = \frac{\pi}{2} + O(\frac{1}{T}),$$

där sista likheten följer från identiteten

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}, \qquad x > 1,$$

alternativt genom uppskattning av integralrepresentationen av $\arctan x$.

För $\Delta_L \arg(\pi^{-\frac{1}{2}s})$ skriver vi

$$\pi^{-\frac{1}{2}s} = e^{-\frac{1}{2}s\log\pi},$$

så

$$\Delta_L \arg(\pi^{-\frac{1}{2}s}) = \Delta_L \mathrm{Im}\left(-\frac{1}{2}s\log\pi\right) = \Delta_L(-\frac{1}{2}t\log\pi) = -\frac{T}{2}\log\pi.$$

Vi noterar att $\Gamma(s) \in \mathbb{R}$ om $s \in \mathbb{R}$ så

$$\Delta_L \arg\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right) = \arg\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right)\Big|_{s=\frac{1}{2}+iT} = \arg\Gamma\left(\frac{iT}{2}+\frac{5}{4}\right)$$

Nu ges argumentet av imaginärdelen till $\log \Gamma$, och vi kan applicera Stirlings formel, proposition A.2.2, och vi får

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\left[\log\Gamma(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4})\right] &= \operatorname{Im}\left[\left(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4}\right)\log\left(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4}\right)-\tfrac{iT}{2}-\tfrac{5}{4}+\tfrac{1}{2}\log 2\pi-\tfrac{1}{2}\log(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4})\right]+O(\tfrac{1}{T})\\
&= \operatorname{Im}\left[(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{3}{4})\log(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4})\right]-\tfrac{T}{2}+O(\tfrac{1}{T})\\
&= \tfrac{T}{2}\log|\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4}|+\tfrac{3}{4}\arg(\tfrac{iT}{2}+\tfrac{5}{4})+O(\tfrac{1}{T})=\tfrac{1}{2}T\log\tfrac{T}{2}+\tfrac{3\pi}{8}+O(1).
\end{aligned}$$

Vi har nu att

$$\begin{aligned}
\pi N(T) &= \frac{1}{2}T\log\frac{1}{2}T-\frac{1}{2}T+\frac{3\pi}{8}-\frac{T}{2}\log\pi+\frac{\pi}{2}+O(\frac{1}{T})+\Delta_L\arg\zeta(s)\\
\iff N(T) &= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2}+\frac{7}{8}+O(\frac{1}{T})+\frac{\Delta_L\arg\zeta(s)}{\pi}.
\end{aligned}$$

Allt som nu återstår är att visa att $\Delta_L\arg\zeta(s)=O(\log T)$. Definitionsmässigt har vi

$$\Delta_L\arg\zeta(s)=O(1)+\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\operatorname{Im}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]\mathrm{d}s$$

där $O(1)$ är bidraget från linjestycket mellan 2 och $2+iT$, vilket gäller eftersom $\arg\zeta(2)=0$ och $\zeta(2+iT)$ är begränsad. Enligt lemma 2.2.4 ovan kan vi skriva

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right]=O(\log T)+\sum_{\substack{n\\|T-\gamma_n|<1}}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{s-\rho_n}\right].$$

Så det gäller nu att uppskatta integralen av dessa termer, varav den första trivialt är $O(\log T)$ och

$$\left|\int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT}\operatorname{Im}\left[\frac{1}{s-\rho_n}\right]\mathrm{d}s\right|=|\Delta\arg(s-\rho_n)|\leq\pi.$$

Antalet termer i summan är enligt följd (i) till lemma 2.2.3 $O(\log T)$ och vi kan alltså dra slutsatsen att $\Delta_L\arg\zeta(s)=O(\log T)$, och således är satsen bevisad.

□

Områden utan nollställen

För senare uppskattningar med kurvintegraler vill vi hitta områden där $\zeta(s)$ alltid är nollskild och vi har följande resultat.

Proposition 2.2.2. $\zeta(s)\neq 0$ i området $\sigma\geq 1$.

Bevis. Det återstår bara att visa att $\zeta\neq 0$ på den vertikala linjen $\sigma=1$ enligt sats 2.2.4.

Beviset bygger på identiteten

$$3+4\cos\theta+\cos 2\theta=2(1+\cos\theta)^2\geq 0,$$

som gäller för alla θ. Vi använder nu denna olikhet för $\operatorname{Re}[\log\zeta(s)]$ med $\theta=tn\log p$. Vi har således

$$\begin{aligned}
&\sum_p\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^{-\sigma n}}{n}\left(3+4\cos(nt\log p)+\cos(2nt\log p)\right)\\
&=3\log\zeta(\sigma)+4\operatorname{Re}[\log\zeta(\sigma+it)]+\operatorname{Re}[\log\zeta(\sigma+2it)]\geq 0.
\end{aligned}$$

Alltså har vi att

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta^4(\sigma+it)\zeta(\sigma+2it)|\geq 1 \tag{2.2.22}$$

då $\sigma > 1$.

Antag nu att $\zeta(1+it) = 0$ för något t. Vi har att $\zeta(\sigma) = O(\frac{1}{1-\sigma})$ då $\sigma \to 1^+$, enligt (2.2.14). Vi har alltså i en pol av ordning 3 mot ett nollställe av minst ordning 4. Då måste, för att (2.2.22) ska vara uppfylld, ζ ha en pol i $s = 1 + 2it$. Men av (2.2.6) följer det att $|\zeta(\sigma + 2it)| < C|\sigma + 2it|$. Detta ger önskade motsägelse, så $\zeta(1 + it) \neq 0, \forall t$. $\square$

Men vi kan göra bättre än så, och utvidga till en omgivning till vänster om $\sigma = 1$.

Sats 2.2.6. Låt $s = \sigma + it$, $t, \geq 2$. Då finns en konstant c så att $\zeta(s) \neq 0$ i området $\sigma \geq 1 - \frac{c}{\log t}$.

Bevis. Vi använder samma idé som ovan, men på $\zeta'(s)/\zeta(s)$ istället för $\log \zeta(s)$. Av (2.2.13) har vi att

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

vilken är reellvärd för reella argument. För komplexa argument har vi att

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} \cos(t \log n).$$

Med $t = 0, t, 2t$ som innan har vi alltså

$$-3\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma) + 4\mathrm{Re}\left[-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it)\right] + \mathrm{Re}\left[-\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + 2it)\right] \geq 0.$$

Den första termen är enligt (2.2.15) $\frac{1}{\sigma - 1} + K$ och de senare kan uppskattas med (2.2.17) som säger att för $t \geq 2$ och $1 \leq \sigma \leq 2$

$$-\mathrm{Re}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} < A \log t - \sum_n \mathrm{Re}\left[\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n}\right].$$

För att få ett enklare uttryck för högerledet visar vi nu att summan är positiv, så att denna kan utelämnas.

Vi har att

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{s - \rho_n}\right] = \frac{\sigma - \beta_n}{|s - \rho_n|^2}$$

där β_n är realdelen till ρ_n och $\sigma > \beta_n$. Vidare är $\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\rho_n}\right] = \frac{\beta_n}{|\rho_n|^2}$.

När $s = \sigma + 2it$ kan vi alltså göra oss av med summan, det vill säga

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)}\right] < A \log t.$$

För $s = \sigma + it$ låter vi t sammanfalla med imaginärdelen för ett nollställe ≥ 2. Vi låter $\frac{1}{s - \rho_n}$ vara denna term. Då gäller att

$$-\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)}\right] < A \log t - \frac{1}{\sigma - \beta_n}.$$

Vi använder nu dessa uppskattningar i vår trigonometiska formel och får

$$\frac{4}{\sigma - \beta_n} < A \log t + \frac{3}{\sigma - 1},$$

för något möjligen annat A. Låt nu $\delta > 0$ vara en konstant och sätt $\sigma = 1 + \frac{\delta}{\log t}$. Löser vi nu ut β_n får vi

$$\beta_n < 1 + \frac{\delta}{\log t} - \frac{4\delta}{(3 + A\delta)\log t}$$

och efter lämpligt val av δ erhåller vi att

$$\beta_n < 1 - \frac{c}{\log t},$$

vilket skulle bevisas. □

2.3 Explicit formel för ψ

Vi ska i detta avsnitt härleda en explicit formel för $\psi(s)$, som kommer ligga till grund för beviset av primtalssatsen i nästa avsnitt. Enklaste sättet att härleda denna är med hjälp av Perrons formel, som vi nu formulerar.

Sats 2.3.1. (Perrons formel) Låt $y, c > 0$ Då gäller

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} = \begin{cases} 0 & \text{om } y < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{om } y = 1, \\ 1 & \text{om } y > 1. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

Låt oss kalla högerledet för $h(y)$. En kvantitativ version lyder: för varje $T > 0$ gäller det att

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{\mathrm{d}s}{s} - h(y)\right| \ll \begin{cases} cT^{-1} & \text{om } y = 1, \\ \min\{y^c, \frac{y^c}{T|\log y|}\} & \text{annars.} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Bevis. Se appendix A.8. □

Eftersom ψ har diskontinuiteter där x är en primtalspotens introducerar vi en modifierad version av ψ. Detta för att formeln ska gälla även i dessa punkter. Vi låter

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi(x) - \frac{1}{2}\Lambda(n) & \text{om } x \text{ är en primtalspotens,} \\ \psi(x) & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi är nu redo att visa en explicit formeln för ψ_0 och formulerar den i följande sats.

Sats 2.3.2. För alla $x \geq 2$ gäller det att

$$\psi_0(x) - x = \sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1 - \frac{1}{x^2}) \tag{2.3.3}$$

där ρ är komplexa nollställen till $\zeta(s)$.

Anmärkning 2.3.1. Summan i formeln ska förstås som

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{|\rho|\leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + \frac{x^{\bar\rho}}{\bar\rho}$$

det vill säga att komplexkonjugaten av nollställena summeras tillsammans med växande belopp av imaginärdelen.

Bevis. Vi börjar med att konstatera att $\zeta'(0)/\zeta(0) = O(1)$. Vidare ger serierepresentation av den sista termen oss inget annat än

$$\frac{1}{2}\log(1-x^{-2}) = \sum_n \frac{x^{-2n}}{2n} = -\sum_\omega \frac{x^\omega}{\omega} \tag{2.3.4}$$

där ω löper över de triviala nollställena till ζ, dvs $-2, -4, -6, \ldots$. Vi påstår nu att för $\sigma > 1$ så är

$$\psi_0(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

För att inse detta minns vi att i detta område gäller likheten

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s},$$

vilket var (2.2.12). Så vi kan skriva

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s.$$

Summan är absolutkonvergent för $\sigma > 1$ och vi gör omflyttningen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{x}{n}\right)^s\frac{\mathrm{d}s}{s}.$$

Vi använder nu Perrons formel, (2.3.1), på $y = \frac{x}{n}$ och får att integralen är 0 för $x < n$, men $\frac{1}{2}$ och 1 för $x = n$ respektive $x > n$. Således får vi att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s = \sum_{n<x}\Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(x) = \psi_0(x),$$

där $\Lambda(x) = 0$ om $x \notin \mathbb{N}$. Låt nu $r > 0$ vara ett stort udda heltal. Vi ska integrera vänsterledet ovan i rektangeln R med hörn i $c \pm iT$, $-r \pm iT$. Då passerar linjestycket från $-r - iT$ till $-r + iT$ mellan två triviala nollställen till $\zeta(s)$. Vi har av Cauchys residysats att integralen är summan av residyerna till integranden

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}.$$

Bidraget från polen i $s = 1$ ger bidraget x, vilket kan ses genom (2.2.11). Polen i 0 till $\frac{1}{s}$ bidrar med $-\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}$. Vidare ser vi att varje nollställe till $\zeta(s)$ i R bidrar med $-\frac{x^\omega}{\omega}$. Således har vi att

$$\psi_0(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} + \sum_{\rho\in R}\frac{x^\rho}{\rho} + \sum_{n<\frac{r}{2}}\frac{x^{-2n}}{2n} + E(x,T,r).$$

Feltermen $E(x,T,r)$ kommer dels från att vi inte har $T = \infty$ när vi använder Perrons formel så vi får feltermer av typen i (2.3.2), vi kallar denna felterm $e(T)$. Dessutom får vi en felterm från de andra sidorna i rektangeln som beror valet av r. Feltermen är alltså på formen

$$E(x,T,r) = O\left(\int_{c+iT}^{-r+iT} + \int_{-r+iT}^{-r-iT} + \int_{-r-iT}^{c-iT}\right) + e(T),$$

och vi ska nu uppskatta denna. Vi börjar med att uppskatta $e(T)$ och applicerar Perrons formel som ger oss att

$$\left|\psi_0(x) - \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s\right| \ll \sum_{n\neq x}\Lambda(n)\min\left\{\left(\frac{x}{n}\right)^c, \left(\frac{x}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\frac{x}{n}|}\right\} + \frac{c}{2T}\Lambda(x).$$

Vi har alltså att uppskatta summan i högerledet. Låt $c = 1 + \dfrac{1}{\log x}$. Då är $x^c = ex$. Vi delar upp i fall och börjar med $n \leq \frac{3}{4}x$ och $n \geq \frac{5}{4}x$. För dessa n kan vi hitta en undre begränsning för $|\log \frac{x}{n}|$ så att vi kan skriva

$$\sum \Lambda(n) \min \left\{ \left(\frac{x}{n}\right)^c, \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log \frac{x}{n}|} \right\} = O\left(\frac{x^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \right) = O\left(\frac{x^c}{T} \left[-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} \right] \right).$$

(2.2.15) ger med $s = c$ att

$$-\frac{\zeta'(c)}{\zeta(c)} = O(\log x)$$

vilket ger oss uppskattningen $O(\dfrac{x^c}{T} \log x)$. Näst betraktar vi fallet då $\frac{3}{4}x < n < x$. Låt nu x_1 vara den största primtalspotensen mindre än x och antag att $\frac{3}{4}x < x_1 < x$. För $n = x_1$ har vi att

$$\log \frac{x}{n} = \log \left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right)^{-1} = -\log \left(1 - \frac{x - x_1}{x}\right) \geq \frac{x - x_1}{x}$$

så

$$\Lambda(x_1) \min \left\{ \left(\frac{x}{x_1}\right)^c, \left(\frac{x}{x_1}\right)^c \frac{1}{T|\log \frac{x}{x_1}|} \right\} = O\left(\Lambda(x_1) \min \left\{ 1, \frac{x}{T(x - x_1)} \right\} \right)$$

ty $\left(\dfrac{x}{x_1}\right)^c$ är begränsad. $\Lambda(x_1) \leq \log x$ så slutligen

$$O\left((\log x) \min \left\{ 1, \frac{x}{T(x - x_1)} \right\} \right).$$

För $n \neq x_1$ i detta område gör vi följande: Låt $n = x_1 - v$ där $0 < v < \frac{1}{4}x$. Då gäller följande

$$\log \frac{x}{n} \geq \log \frac{x_1}{n} = -\log \left(1 - \frac{v}{x_1}\right) \geq \frac{v}{x_1}.$$

Således blir uppskattningen över dessa n $O\left(\dfrac{x}{T}(\log x)^2\right)$, ty vi får

$$\frac{x}{T} \sum_{4v < x} \frac{\Lambda(x_1 - v)}{v} \left(\frac{x}{x_1}\right)^c \leq C \frac{x \log x}{T} \sum_{4v < x} \frac{1}{v}$$

för någon positiv konstant C. Slutligen betraktar vi fallet $x < n < \frac{5}{4}x$ och låter x_2 vara den lägsta primtalspotensen större än x. Fallet då $n = x_2$ ger, analogt med ovan att

$$\log \frac{n}{x} \geq \frac{x_2 - x}{x_2}$$

och således att denna term i summan är

$$O\left((\log x) \min \left\{ 1, \frac{x}{T(x_2 - x)} \right\} \right).$$

För $n \neq x_2$ sätter vi $n = x_2 + v$ med $0 < v < \frac{1}{4}x$ och det följer från olikheten

$$\log \left(1 + \frac{v}{x_2}\right) \geq \frac{v}{x_2}$$

att summan kan uppskattas till $O\left(\dfrac{x}{T}(\log x)^2\right)$.

Tillsammans med de tidigare uppskattningarna får vi slutligen att

$$\left| \psi_0(x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} \mathrm{d}s \right| = O\left(\frac{x}{T}(\log x)^2 + \log x \min \left\{ 1, \frac{x}{Td} \right\} \right)$$

där d betecknar avståndet till den närmsta primtalspotensen. Nu återstår att uppskatta feltermerna för de andra sidorna i vår rektangel R.

Av Cauchys residysats har vi att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_R -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s = x - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{0<2n<r}\frac{x^{-2n}}{-2n}.$$

Antalet nollställen med $|T-\gamma|<1$ är $O(\log T)$ enligt följd till lemma 2.2.3, så det finns hål med längd i storleksordning $\frac{1}{\log T}$. Vi har då, om vi låter T variera smått att $|T-\gamma|$ är minst av storleksordning $\frac{1}{\log T}$ för alla nollställen $\beta+i\gamma$. Av lemma 2.2.4 har vi för $s=\sigma+iT$, $-1\leq\sigma\leq 2$ att

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|T-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + O(\log T)$$

så i detta område gäller att

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leq \sum_{|T-\gamma|<1}\left|\frac{1}{s-\rho}\right| + O(\log T) \leq \sum_{|T-\gamma|<1}\frac{1}{|T-\gamma|} \leq \sum_{|T-\gamma|<1} O(\log T) + O(\log T).$$

Enligt ovan och antalet termer i summan är $O(\log T)$, så vi har att

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = O(\log^2 T) \qquad \text{för } -1\leq\sigma\leq 2. \tag{2.3.5}$$

Vi använder nu denna uppskattning i de horisontella linjeintegralerna i feltermen,

$$\int_{-1+iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \ll \log^2 T\int_{-1}^{c}\frac{x^\sigma}{|s|}\mathrm{d}\sigma \ll \frac{\log^2 T}{T}\int_{-\infty}^{c} x^\sigma \mathrm{d}\sigma \ll \frac{x\log^2 T}{T\log x}.$$

För resterande del av de horisontella linjeintegralerna använder vi att $|\zeta'(s)/\zeta(s)| = O(\log(2|s|)$, vilket var (2.2.19), och får på samma vis att

$$\int_{-r+iT}^{-1+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \ll \frac{1}{T}\log(2T)\int_{-r}^{-1} x^\sigma\mathrm{d}\sigma \ll \frac{\log T}{Tx\log x}.$$

Vi ser att detta uttryck är försumbart då det är väsentligt mindre än det förra. Sist uppskattar vi den vertikala linjeintegralen, som är

$$\int_{-r-iT}^{-r+iT} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\frac{x^s}{s}\mathrm{d}s \ll \frac{\log 2r}{r}\int_{-T}^{T} x^{-r}\mathrm{d}t \ll \frac{T\log r}{rx^r}.$$

Låter vi nu $r\to\infty$ så försvinner denna uppskattning, och beroendet på r, och vi får den explicita formeln för $\psi_0(x)$ med

$$E(x,T) = O\left(\frac{x\log^2(xT)}{T} + (\log x)\min\left\{1, \frac{x}{Td}\right\}\right). \tag{2.3.6}$$

Vi ser att $E(x,T)\to 0$ när $T\to\infty$ för $x\geq 2$. □

2.4 Bevis

Vi är nu redo att visa att $\psi(x) = x + O(xe^{-c(\log x)^{\frac{1}{2}}})$ för någon positiv konstant c, och därefter övergå till $\pi(x)$ och den ursprungliga primtalssatsen. Vi utgår från den explicita formeln för ψ som var sats 2.3.2 i förra avsnittet, och vi har alltså att uppskatta

$$-\sum_\rho\frac{x^\rho}{\rho} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2}\log(1-x^{-2})$$

vilket främst innebär att uppskatta summan. Vi har för $\rho = \beta + i\gamma$, nollställen till $\zeta(s)$ av sats 2.2.6 att om $|\gamma| < T$ så är $\beta < 1 - \dfrac{c}{\log T}$ för stora T. Detta medför att

$$|x^\rho| = x^\beta = e^{\beta \log x} < e^{\log x - c\log x/\log T} = xe^{-c\log x/\log T}.$$

Vi tittar näst på nämnaren: $|\rho| \geq \gamma$ så om vi kan uppskatta

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma}$$

är vi klara. Vi låter som innan $N(t)$ beteckna antalet nollställen till $\zeta(s)$ med imaginärdel mindre än t i området $0 < \sigma < 1$. Vi har då att

$$\sum_{0<\gamma<T} \frac{1}{\gamma} = \int_0^T \frac{\mathrm{d}N(t)}{t} = \frac{N(T)}{T} + \int_0^T \frac{N(t)}{t^2}\mathrm{d}t,$$

med (A.1.2). $N(t) = O(t\log t)$ enligt sats 2.2.5 så om vi ersätter integralen i högerledet med detta får vi $O(\log^2 T)$. Slutligen får vi då att

$$\sum_{0<\gamma<T} \left|\frac{x^\rho}{\rho}\right| = O\left(x\log^2 T e^{-c\log x/\log T}\right).$$

Låt nu x vara ett heltal, detta kan vi göra utan inskränkning. Då gäller det att (2.3.6) i förra avsnittet tar formen $E(x,T) = O\left(\dfrac{x\log^2(xT)}{T}\right)$ ty $d \geq 1$ så den senare termen är försumbar. Vi får då att

$$|\psi_0 - x| = O\left(\frac{x\log^2(xT)}{T} + x\log^2 T e^{-c\log x/\log T}\right).$$

Vi bestämmer nu T som en funktion av x, och sätter $\log^2 T = \log x$. Vi får att $T^{-1} = e^{-(\log x)^{\frac{1}{2}}}$ och

$$|\psi_0 - x| = O\left(x\log^2(x)e^{-(\log x)^{\frac{1}{2}}} + x\log(x)e^{-c(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right) = O\left(xe^{-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

där $c_1 < \min\{1, c\}$ är en konstant. Således har vi alltså att

$$\psi(x) = x + O\left(xe^{-c_1(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right) \tag{2.4.1}$$

och vi är redo för övergången till $\pi(x)$.

Sats 2.4.1. (Primtalssatsen) Vi har att

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(xe^{-c(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right)$$

för någon konstant $c > 0$.

Bevis. Vi låter $\Pi(x) = \sum_{n\leq x} \dfrac{\Lambda(n)}{\log n}$. Vi ser att termerna där n är ett primtal är 1, 0 om n är en produkt av två eller fler primtal och $\dfrac{1}{k}$ om $n = p^k$. Vi kan skriva

$$\Pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 + \frac{1}{2}\sum_{p^2\leq x} 1 + \frac{1}{3}\sum_{p^3\leq x} 1 + ... = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + ...$$

Partiell summation A.1.1 säger följande. Låt $f \in C^1(\mathbb{R})$, då

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t,$$

där $A(x) = \sum_{n \leq x} a_n$.

Vi använder nu detta på $\Pi(x)$ vilket ger oss

$$\frac{1}{\log x} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) + \int_n^x \sum_{n \leq t} \Lambda(n) \frac{\mathrm{d}t}{t \log^2 t} = \frac{\psi(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{\psi(t)}{t \log^2 t} \mathrm{d}t.$$

Då vi ovan visat att $\psi(x)$ och x är asymptotiskt lika, (2.4.1), kan vi skriva

$$\frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log^2 t} = \mathrm{li}(x) + \frac{2}{\log 2}.$$

Allt som återstår är nu att beräkna feltermen som blir

$$\ll \int_2^x e^{-c_1 (\log t)^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}t + x e^{-c_1 (\log x)^{\frac{1}{2}}}.$$

För $2 \leq t < x^{\frac{1}{4}}$ är integralen mindre än $x^{\frac{1}{4}}$, ty integranden är < 1. I resterande område gäller det att $(\log t)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} (\log x)^{\frac{1}{2}}$ ty

$$\tfrac{1}{2} (\log x)^{\frac{1}{2}} = (\tfrac{1}{4} \log x)^{\frac{1}{2}} = (\log x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}}.$$

Slutligen får vi alltså att

$$\Pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x e^{-c_2 (\log x)^{\frac{1}{2}}} \right) \tag{2.4.2}$$

där $c_2 = \frac{1}{2} c_1$. Denna framställning innehåller feltermen för $2 \leq t < x^{\frac{1}{4}}$. Trivialt gäller det att $\pi(x^{\frac{1}{n}}) \leq x^{\frac{1}{n}}$ så $\Pi(x) - \pi(x) = O(\sqrt{x})$ vilket innebär att

$$\pi(x) = \mathrm{li}(x) + O\left(x e^{-c_2 \sqrt{\log x}} \right) \tag{2.4.3}$$

vilket skulle visas. $\square$

Kapitel 3

Ett pretentiöst bevis

Vi ger nu ett bevis av primtalssatsen på det pretentiösa sättet. Det består i att göra uppskattningar (sats 3.3.1, lemma 3.3.1) av multiplikativa funktioners pretentiösa avstånd till $\mathbb{1}(n)$ och sedan utnyttja Halász sats (sats 3.4.2). Den ger en asympotisk begränsning av medelvärdet till multiplikativa funtioner i termer av det pretentiösa avståndet till funktionen $f(n) = n^{i\alpha}$ och alltså ger de tidigare uppskattningarna en ovillkorlig asymptotisk begränsning av medelvärdet. Vi använder $\mu(n)$ och får således en asymptotisk begränsning av

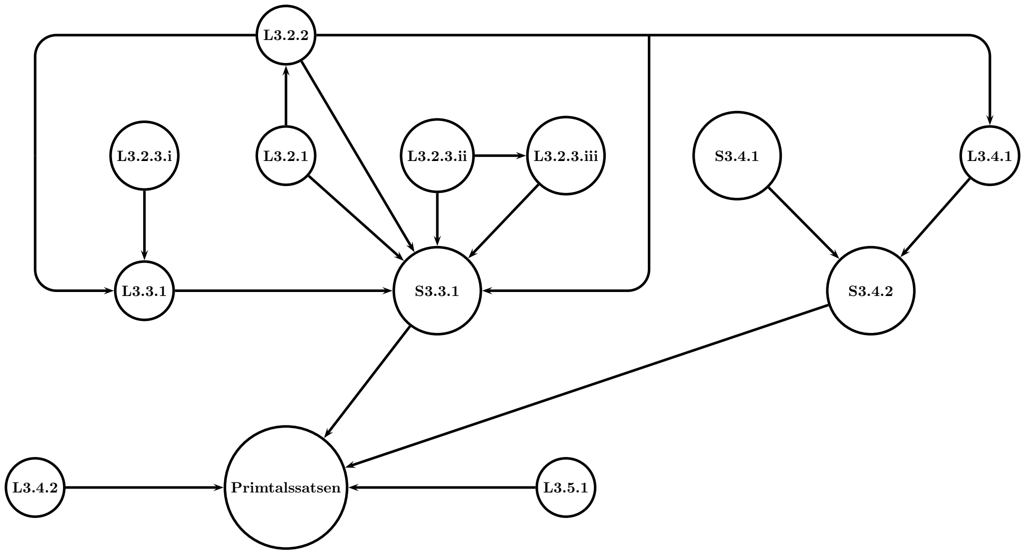
$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x}\mu(n).$$

Detta är $M(x)/x$ som är en känd funktion. Med hjälp av ett antal välkända asymptotiska resultat (lemma 3.5.1, (A.5.5), proposition A.5.2) får man genom den asymptotiska begränsningen av $M(x)/x$ en asymptotisk begränsning av

$$\psi(x) - x,$$

från vilken primtalssatsen erhålles (sats 3.5.1).

För att kunna göra uppskattningarna av det pretentiösa avståndet krävs först ett antal grundläggande lemman, vilka i sin tur beror på grundläggande teori inom analytisk talteori. Vi ger därmed först en koncis framställning av den nödvändiga bakgrundsteorin och använder sedan detta för att ta fram de lemman som behövs för att uppskatta det pretentiösa avståndet. För att förenkla förståelsen ger vi en karta över bevisets beroenden.



Figur 3.1: Bevisets beroenden. "S" betecknar sats och "L" betecknar lemma.

3.1 Grundläggande teori om Dirichletserier

Innan vi ger oss kast med att bevisa primtalssatsen behöver vi introducera grundläggande teori för multiplikativa funktioner. Bevisen finns i appendix A.4.

Definition 3.1.1. Låt f och g vara aritmetiska funktioner. Dirichletfaltningen av f och g är funktionen

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d). \tag{3.1.1}$$

Proposition 3.1.1. Låt $\mathcal{F}$ vara mängden av alla aritmetiska funktioner f med $f(1) \neq 0$. Då är $(\mathcal{F}, *)$ en abelsk grupp med identitetselementet δ.

Definition 3.1.2. Inversen till ett element $f \in \mathcal{F}$ kallas *Dirichletinversen* och betecknas f^{-1}.

Vi har ett antal grundläggande faltningsidentiter.

Proposition 3.1.2. Vi har följande faltningsidentiter.

(i) Det gäller att $\mathbb{1} * \mu = \delta$ eller med andra ord att $\mathbb{1}^{-1} = \mu$.

(ii) Om f och g är aritmetiska funktioner så $f = \mathbb{1} * g$ omm $\mu * f = g$. Detta kallas *Möbiusinversion.*

(iii) Vi har identiteterna $\Lambda = \log * \mu$ samt $\mathbb{1} = \tau * \mu$.

Vi inför nu Dirichletserier.

Definition 3.1.3. Låt f vara en aritmetisk funktion. Dirichletserien $F(s)$ av f i s är serien

$$F(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Vi använder konventionsmässigt stor bokstav för Dirichletserier.

På grund av nedanstående entydighetssats är det naturligt att identifiera en Dirichletserie med sina koefficienter.

Proposition 3.1.3. Låt f och g vara aritmetiska funktioner med associerade Dirichletserier $F(s)$ respektive $G(s)$, och anta att F och G absolutkonvergerar i området $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.
Om $F(s) = G(s)$ för alla s så $f(n) = g(n)$ för alla $n \in \mathbb{N}$.

En direkt konsekvens är att $F(s) = 0$ om och endast om $f(n) = 0$ för alla n.
Multiplikation av Dirichletserier har nedanstående samband med Dirichletfaltning av aritmetiska funktioner.

Proposition 3.1.4. Låt $F(s)$ och $G(s)$ vara Dirichletserier av funktionerna f respektive g och anta att dessa absolutkonvergerar i s . Då gäller att

$$F(s)G(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{(f * g)(n)}{n^s}. \tag{3.1.2}$$

Vi inför en generaliserad version av Λ samt en beteckning för den aritmetiska funktionen associerad med derivatan av en Dirichletserie.

Definition 3.1.4. Låt f vara en aritmetisk funktion. Då är

$$f^D(n) = f(n)\log(n),$$

samt

$$\Lambda_f = f^D * f^{-1}.$$

Notera att $\Lambda = \Lambda_{\mathbb{1}}$.

Vi har nu följande resultat.

Proposition 3.1.5. Låt $F(s)$ vara Dirichletserien i s av $f \in \mathcal{F}$ och låt $F(s)$ vara absolutkonvergent i området $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.

(i) Låt $G(s)$ vara Dirichletserien i s av f^{-1}. Om $G(s)$ absolutkonvergerar i området $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ så gäller att $G(s) = 1/F(s)$.

(ii) Det gäller att $F'(s) = -\sum_{n\geq 1} \frac{f^D(n)}{n^s}$. Serien konvergerar då $\mathrm{Re}(s) > \sigma$.

(iii) Låt f vara en funktion sådan att $|f(n)| \leq 1$ för alla n, och låt $\sigma > 1$. Om $|\Lambda_f(n)| \leq \kappa\Lambda(n)$ så gäller att $\frac{-F'(s)}{F(s)} = \sum_{n\geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s}$.

3.2 Grundläggande lemman

Proposition 3.2.1. On $x \geq 2$ så

$$\sum_{p\leq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

där C är en konstant.

Bevis. Se appendix A.5. □

Lemma 3.2.1. Låt K vara en konstant, $|a_p| \leq K$ för alla p och $\alpha = 1 + \frac{1}{\log x}$. Då gäller

$$\sum_{p\leq x} \frac{a_p}{p} = \sum_{p} \frac{a_p}{p^\alpha} + O(1). \tag{3.2.1}$$

Bevis. Se appendix A.9. □

Vi introducerar nu det pretentiösa avståndet.

Definition 3.2.1. Låt f och g vara aritmetiska funktioner med $|f(n)| \leq 1$ och $|g(n)| \leq 1$ för alla n. Då är det pretentiösa avståndet mellan f och g upp till x nedanstående summa

$$\mathbb{D}(f, g; x)^2 = \sum_{p \leq x} \frac{1 - \mathrm{Re} f(p)\overline{g(p)}}{p}.$$

Följande lemma ger en asymptotisk övre och nedre begränsning av en Dirichletserie i termer av det pretentiösa avståndet.

Lemma 3.2.2. Antag att f är multiplikativ, $|f(n)| \leq 1$ för alla n, och att $|\Lambda_f(n)| \leq \kappa\Lambda(n)$ för något $\kappa > 0$. Då gäller

$$\left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| \asymp \log x \exp(-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2).$$

Bevis. Enligt proposition 3.1.5.iii har vi att

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} = \frac{-F'(s)}{F(s)},$$

och att serien konvergerar då $\mathrm{Re}(s) > 1$. Låt nu a vara en konstant med $\mathrm{Re}(a) > 1$. Då får vi

$$\begin{aligned} -\log F(s) - \log F(a) &= \int_a^s (-\log F(s_0))' \mathrm{d}s_0 = \int_a^s \frac{-F'(s_0)}{F(s_0)} \mathrm{d}s_0 = \sum_{n \geq 2} \int_a^s \frac{\Lambda_f(n)}{n^{s_0}} \mathrm{d}s_0 \\ &= \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{-\log n} n^{-s} + \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{\log n} n^{-a} = \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{-\log n} n^{-s} + O(1), \end{aligned}$$

där det sista steget följer av att $\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{\log n} n^{-a}$ konvergerar enligt jämförelse med $\frac{-F'(a)}{F(a)}$. Därmed

$$\log F(s) = \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{\log n} n^{-s} + O(1).$$

Nu har vi

$$\begin{aligned} \log F(s) &= O(1) + \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{\log n} n^{-s} = O(1) + \sum_{p^k, k \geq 1} \frac{\Lambda_f(p^k)}{p^{ks} \log p^k} \\ &= O(1) + \sum_p \frac{f(p) \log p}{p^s \log p} + \sum_p \frac{\Lambda_f(p^2)}{p^{2s} \log p^2} + \dots, \end{aligned}$$

ty $\Lambda_f(n) = 0$ när helst $n \neq p^k$, $k \geq 1$, enligt (A.6.2) och $\Lambda_f(p) = f(p) \log p$ enligt (A.6.1). Låt nu $l \geq 2$ och p vara fixt. Då erhåller vi

$$\left| \frac{\Lambda_f(p^l)}{p^{ls} \log p^l} \right| \leq \frac{\kappa |\Lambda(p^l)|}{l p^{l\sigma} \log p} = \frac{\kappa}{l} \frac{\log p}{p^{l\sigma} \log p} = \frac{\kappa}{l} \frac{1}{p^{l\sigma}} \leq \kappa \frac{1}{p^{l\sigma}}.$$

Så

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p^k, k \geq 2} \frac{\Lambda_f(p^k)}{p^{ks} \log p^k} \right| &\leq \kappa \sum_{p^k, k \geq 2} \frac{1}{p^{k\sigma}} \leq \kappa \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{k\sigma}} \\ &= \kappa \sum_p \frac{1}{p^{2\sigma}} \frac{1}{1 - p^{-\sigma}} \leq \kappa \sum_p \frac{2}{p^{2\sigma}} = O(1). \end{aligned}$$

Detta ger slutligen att

$$\log F(s) = \sum_p \frac{f(p) \log p}{p^s \log p} + O(1) = \sum_p \frac{f(p)}{p^s} + O(1). \tag{3.2.2}$$

Vidare har vi genom lemma 3.2.1 att

$$\begin{aligned}
-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 &= \sum_{p \le x} \frac{\operatorname{Re}(f(p)p^{-it})}{p} - \sum_{p \le x} \frac{1}{p} = \operatorname{Re}\left(\sum_{p} \frac{f(p)}{p^{1+\frac{1}{\log x}+it}}\right) - \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O(1) \\
&= \operatorname{Re} \log F(1 + \frac{1}{\log x} + it) - \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O(1) \\
&= \log \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| - \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O(1).
\end{aligned}$$

Det vill säga

$$\log \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| = \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + O(1) - \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2.$$

Med proposition 3.2.1 erhåller vi

$$\log \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| - \log \log x + \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 = O(1). \tag{3.2.3}$$

Detta är ekvivalent med

$$-K \le \left(\log \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| - \log \log x + \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 \right) \le K,$$

där K är en positiv konstant. Detta ger att

$$e^{-K} \le \frac{1}{\log x} \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| \exp(\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2) \le e^K,$$

eller med andra ord att

$$\frac{1}{\log x} \left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| \exp(\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2) \asymp 1,$$

vilket i sin tur är ekvivalent med

$$\left| F(1 + \frac{1}{\log x} + it) \right| \asymp \log x \exp(-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2).$$

□

Lemma 3.2.3. Vi har att $\zeta(s)$ satisfierar följande relationer.

(i) Om $\sigma > 0$ har vi att $\left|\zeta(s) - \frac{s}{s-1}\right| \le \frac{|s|}{\sigma}$.

(ii) Om $\sigma > 1$ och $|s-1| \gg 1$ har vi att $|\zeta(s)| \ll \log(2 + |s|)$.

(iii) Om $\sigma > 1$ och $|s-1| \gg 1$ har vi att $|\zeta'(s)| \ll \log^2(2 + |s|)$.

Bevis. Se appendix A.7. □

3.3 Avståndsbegränsning

Nedanstående lemma bestämmer det pretentiösa avståndet mellan $\mathbb{1}(n)$ och $n^{i\alpha}$ då $|\alpha|$ är begränsad från ovan.

Lemma 3.3.1. Låt $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \ge 3$ och $|\alpha| \le \alpha_0$, där $\alpha_0 > 1$ är en konstant. Då

$$\mathbb{D}(1, p^{i\alpha}; x)^2 = \log(1 + |\alpha| \log x) + O(1).$$

Bevis. Från (3.2.3) har vi

$$\log\left|\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)\right| = \log\log x - \mathbb{D}(1,n^{i\alpha};x)^2 + O(1) = \log\log x - \sum_{p\le x}\frac{1-\mathrm{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1)$$
$$= \log\log x - \log\log x + \sum_{p\le x}\frac{\mathrm{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1) = \sum_{p\le x}\frac{\mathrm{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1). \tag{3.3.1}$$

Från lemma 3.2.3.i har vi också

$$\left|\zeta(s) - \frac{s}{s-1}\right| \le \frac{|s|}{\sigma},\ \sigma > 0.$$

Det vill säga $\zeta(s) = \frac{s}{s-1} + O\left(\frac{|s|}{\sigma}\right)$. Nu har vi att

$$\log\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{\log x}+i\alpha}{\frac{1}{\log x}+i\alpha} + O\left(\frac{\left|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha\right|}{1+\frac{1}{\log x}}\right)\right)$$
$$= \log\left(\frac{1+\frac{1}{\log x}+i\alpha}{\frac{1}{\log x}+i\alpha} + O\left(1\right)\right),$$

ty

$$\frac{\left|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha\right|}{1+\frac{1}{\log x}} \le \alpha_0 + 1 + \frac{1}{\log 3}.$$

Vidare har vi att

$$\log\left(\frac{1+\frac{1}{\log x}+i\alpha}{\frac{1}{\log x}+i\alpha} + O\left(1\right)\right) = \log\left(\frac{1+\frac{1}{\log x}+i\alpha}{\frac{1}{\log x}+i\alpha}\right) + O(1)$$
$$= \log\left(\frac{\log x + 1 + i\alpha\log x}{1+i\alpha\log x}\right) + O(1)$$
$$= \log(\log x + 1 + i\alpha\log x) - \log(1+i\alpha\log x) + O(1)$$
$$= \log(\log x(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)) - \log(1+i\alpha\log x) + O(1)$$
$$= \log\log x + \log(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha) - \log(1+i\alpha\log x) + O(1).$$

Nu har vi alltså att

$$\mathrm{Re}\log\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha) = \log\left|\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)\right|$$
$$= \log\log x + \mathrm{Re}\log(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha) - \mathrm{Re}\log(1+i\alpha\log x) + O(1)$$
$$= \log\log x + \log|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha| - \mathrm{Re}\log(1+i\alpha\log x) + O(1)$$
$$= \log\log x - \mathrm{Re}\log(1+i\alpha\log x) + O(1).$$

Från (3.3.1) får vi nu att

$$\sum_{p\le x}\frac{\mathrm{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} = \log\log x - \mathrm{Re}\log(1+i\alpha\log x) + O(1),$$

vilket ger att

$$
\begin{aligned}
\mathbb{D}(1, n^{i\alpha}; x)^2 &= \sum_{p\le x}\frac{1}{p} - \sum_{p\le x}\frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \\
&= \operatorname{Re}\log(1+i\alpha\log x) + O(1) = \log|1+i\alpha\log x| + O(1) \\
&= \log(1+|\alpha|\log x) + O(1),
\end{aligned}
$$

där det sista steget följer från

$$
\left(\frac{1+|\alpha|\log x}{|1+i\alpha\log x|}\right)^2 = 1 + \frac{2|\alpha|\log x}{1+\alpha^2\log^2 x} \in [1,2],
$$

som leder till

$$
\log\left(\frac{1+|\alpha|\log x}{|1+i\alpha\log x|}\right) = O(1).
$$

□

Denna sats ger en övre och undre begränsning av det pretentiösa avståndet mellan $\mathbb{1}(n)$ och $n^{i\alpha}$.

Sats 3.3.1 (Avståndsbegränsning 1)**.** Låt $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \ge 3$ och $|\alpha| \ge \frac{1}{\alpha_0}$, där α_0 är samma konstant som i lemma 3.3.1. Då

$$
\begin{cases}
\mathbb{D}(1, p^{i\alpha}; x)^2 \ge \log\log x - \log\log(4+|\alpha|) + O(1) \\
\mathbb{D}(1, p^{i\alpha}; x)^2 \le \log\log x + 12\log\log(4+|\alpha|) + O(1).
\end{cases}
$$

Bevis. Vi har att $|\alpha| \ge \frac{1}{\alpha_0}$, och därför får vi

$$
\left|\frac{1}{\log x} + i\alpha\right| \ge \sqrt{\frac{1}{\alpha_0^2}} = \frac{1}{\alpha_0}.
$$

Detta ger att $\left|\frac{1}{\log x} + i\alpha\right| \gg 1$. Alltså kan vi använda lemma 3.2.2 och lemma 3.2.3.ii med vilka vi får att

$$
\begin{aligned}
&\log x \exp\left(-\sum_{p\le x}\frac{1-\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p}\right) \le K_1|\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)| \le K_1K_2\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|) \\
\Leftrightarrow &\exp\left(-\sum_{p\le x}\frac{1}{p} + \sum_{p\le x}\frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p}\right) \le \frac{K_1K_2}{\log x}\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|) \\
\Leftrightarrow &\exp\left(-\log\log x - R(x) + \sum_{p\le x}\frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p}\right) \le \frac{K_1K_2}{\log x}\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|),
\end{aligned}
$$

så

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\log x}e^{-R(x)}\exp\left(\sum_{p\le x}\frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p}\right) \le \frac{K_1K_2}{\log x}\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|) \\
\Leftrightarrow &\sum_{p\le x}\frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \le \log\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|) + R(x) + O(1),
\end{aligned}
$$

där $R(x) = O(1)$, och K_1, K_2 är konstanter som vi utan inskränkning kan anta är större än 1. Det gäller nu att

$$
\log\log(2+|1+\frac{1}{\log x}+i\alpha|) \le \log\log(4+|\alpha|),
$$

ty $0 < \frac{1}{\log x} < 1$. Så vi får

$$\sum_{p \le x} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \le \log\log(4+|\alpha|) + O(1) \text{ om } |\alpha| \ge \frac{1}{\alpha_0}, \tag{3.3.2}$$

vilket direkt ger den undre begränsningen ty

$$\mathbb{D}(1, p^{i\alpha}; x)^2 = \log\log x + O(1) - \sum_{p \le x} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \ge \log\log x - \log\log(4+|\alpha|) + O(1).$$

Vi bevisar nu den övre begränsningen då $\frac{1}{\alpha_0} \le |\alpha| \le \alpha_0$. Lemma 3.3.1 ger att

$$\mathbb{D}(1, n^{i\alpha}; x)^2 = \log(1 + |\alpha| \log x) + O(1).$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\log(1 + |\alpha| \log x) &= \log(\log x(\frac{1}{\log x} + |\alpha|)) = \log\log x + \log(\frac{1}{\log x} + |\alpha|) \\ &\le \log\log x + \log(2 + |\alpha|) \le \log\log x + 12 \log\log(4+|\alpha|) + O(1),\end{aligned}$$

ty

$$12 \log\log(4+|\alpha|) - \log(2+|\alpha|) = O(1),$$

då $\frac{1}{\alpha_0} \le |\alpha| \le \alpha_0$.

Vi bevisar nu den övre begränsningen då $|\alpha| > \alpha_0$. För det behöver vi att

$$\left| \sum_{y \le p \le x} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} \right| \ll 1, \tag{3.3.3}$$

då $x \ge y := \exp((\log|\alpha|)^{12})$, ty om detta gäller har vi att

$$\begin{aligned}-\sum_{p \le x} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1) &= -\sum_{p \le y} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} - \sum_{y \le p \le x} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1) \\ &= -\sum_{p \le y} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + \operatorname{Re} \sum_{y \le p \le x} -\frac{1}{p^{1+i\alpha}} + O(1) \\ &\le -\sum_{p \le y} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + \left| \sum_{y \le p \le x} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} \right| + O(1) \\ &= -\sum_{p \le y} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} + O(1) \le \sum_{p \le y} \frac{1}{p} + O(1),\end{aligned}$$

där det sista steget följer från att

$$\left| -\sum_{p \le y} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \right| \le \sum_{p \le y} \frac{\left|\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)\right|}{p} \le \sum_{p \le y} \frac{1}{p} \quad \text{ty } |p^{-i\alpha}| = 1.$$

Med detta får vi

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(1, p^{i\alpha}; x)^2 &= \sum_{p \le x} \frac{1}{p} - \sum_{p \le x} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i\alpha}\right)}{p} \le \sum_{p \le x} \frac{1}{p} + \sum_{p \le y} \frac{1}{p} + O(1) \\ &= \log\log x + \log\log y + O(1) \\ &= \log\log x + 12 \log\log|\alpha| + O(1) \\ &= \log\log x + 12 \log\log(4+|\alpha|) + O(1), \text{ ty } y := \exp((\log|\alpha|)^{12}).\end{aligned}$$

Vi bevisar nu att (3.3.3) stämmer.

Det gäller att

$$\sum_p \frac{1}{p^s} = \log \zeta(s) + O(1), \text{ se (3.2.2)},$$

och

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p^{1+it}} = \sum_p \frac{1}{p^s} + O(1), \text{ där } s = 1 + \frac{1}{\log x} + it, \text{ se (3.2.1)}.$$

Så med (3.2.2) och (3.2.1) får vi att

$$\begin{aligned}
\sum_{y<p\le x} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} &= \sum_{p\le x} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} - \sum_{p\le y} \frac{1}{p^{1+i\alpha}} \\
&= \sum_p \frac{1}{p^{1+\frac{1}{\log x}+i\alpha}} - \sum_p \frac{1}{p^{1+\frac{1}{\log y}+i\alpha}} + O(1) \\
&= \log\{\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)\} - \log\{\zeta(1+\frac{1}{\log y}+i\alpha)\} + O(1).
\end{aligned}$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \log(\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)) &= \frac{\zeta'(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)}{\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)} \left(-\frac{1}{\log^2 u}\right) \frac{1}{u} \\
&= -\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha) \frac{1}{u\log^2 u}.
\end{aligned}$$

Ur detta följer

$$\int_y^x -\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)\frac{\mathrm{d}u}{u\log^2 u} = \log\{\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)\} - \log\{\zeta(1+\frac{1}{\log y}+i\alpha)\},$$

och därmed

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{y<p\le x} \frac{1}{p^{1+i\alpha}}\right| &= \left|\log\{\zeta(1+\frac{1}{\log x}+i\alpha)\} - \log\{\zeta(1+\frac{1}{\log y}+i\alpha)\} + O(1)\right| \\
&= \left|\int_y^x -\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)\frac{\mathrm{d}u}{u\log^2 u} + O(1)\right|.
\end{aligned}$$

Från lemma 3.2.3.iii har vi den övre begränsningen $|\zeta'(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)| \ll \log^2|\alpha|$ så vi behöver nu en begränsning av $1/\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)$. Med lemma 3.2.2 får vi att

$$|F(1+\frac{1}{\log x}+it)| \asymp \log x \exp(-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2).$$

Så med vi får att att

$$\mathbb{D}(\mu(n), n^{it}; x)^2 = \sum_{p\le x} \frac{1+\mathrm{Re}(e^{-it\log p})}{p} = \sum_{p\le x} \frac{1+\cos(t\log p)}{p},$$

och alltså

$$\log x \exp\left(-\sum_{p\le x}\frac{1+\cos(t\log p)}{p}\right) \gg \frac{1}{\zeta(s)},$$

där $s = 1 + \frac{1}{\log u} + i\alpha$. Detta är ekvivalent med

$$\log K - \sum_{p \leq x} \frac{1 + \cos(t \log p)}{p} \geq -(\log \log x + \log |\zeta(s)|),$$

där K är en positiv konstant. Detta ger oss i sin tur

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1}{|\zeta(s)|}\right) &\leq \log \log x + \log K - \sum_{p \leq x} \frac{1}{p} - \sum_{p \leq x} \frac{\cos(t \log p)}{p} \\ &= \log \log x + \log K - \log \log x - O(1) - \sum_{p \leq x} \frac{\cos(t \log p)}{p} \\ &= -\sum_{p \leq x} \frac{\cos(t \log p)}{p} + O(1).\end{aligned}$$

Vi erinrar oss nu Cauchy-Schwarz olikhet

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Med $x_i = \frac{1}{\sqrt{p_i}}$ och $y_i = \frac{-\cos(\alpha \log p_i)}{\sqrt{p_i}}$, där p_i betecknar det $i$te primtalet, får vi att

$$\left|\sum_{p \leq u} \frac{-\cos(\alpha \log p)}{p}\right| \leq \left(\sum_{p \leq u} \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p \leq u} \frac{\cos^2(\alpha \log p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Med den trigonometriska ettan och proposition 3.2.1 erhåller vi nu att

$$\left(\sum_{p \leq u} \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{p \leq u} \frac{\cos^2(\alpha \log p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}} = (\log \log u + O(1))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \leq u} \frac{1 + \cos(2\alpha \log p)}{p}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Med (3.3.2) får vi nu att

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \sum_{p \leq u} \frac{1 + \cos(2\alpha \log p)}{p} &= \frac{1}{2} \sum_{p \leq u} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \sum_{p \leq u} \frac{\operatorname{Re}\left(p^{-i2\alpha}\right)}{p} \\ &\leq \frac{1}{2} \log \log u + \frac{1}{2} \log \log(4 + |2\alpha|) + O(1).\end{aligned}$$

Vidare har vi att $y \leq u \leq x$ och $y = \exp((\log |\alpha|)^{12})$ så

$$u \geq \exp(\log |\alpha|)^{12} \Leftrightarrow \log \log |\alpha| \leq \frac{1}{12} \log \log u.$$

Sammanfattningsvis får vi alltså

$$\begin{aligned}&(\log \log u + O(1))^{\frac{1}{2}} (\frac{1}{2} \log \log u + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \log \log u + O(1))^{\frac{1}{2}} \\ &= (\log \log u + O(1))^{\frac{1}{2}} (\frac{13}{24} \log \log u + O(1))^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{13}{24}} \log \log u + O(\sqrt{\log \log u}) \leq \sqrt{\frac{13}{24}} \log \log u + K \sqrt{\log \log u},\end{aligned}$$

där K är en positiv konstant som kommer från proposition 3.2.1 och är därför oberoende av α_0. Eftersom $u \geq \exp((\log |\alpha|)^{12})$ och $|\alpha| > \alpha_0$ kan vi välja α_0 så stort att

$$\frac{K}{\sqrt{\log \log u}} \leq \frac{3}{4} - \sqrt{\frac{13}{24}} \approx 0.0140199279.$$

Detta ger att

$$\sqrt{\frac{13}{24}}\log\log u + K\sqrt{\log\log u} \leq \left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{13}{24}}\right)\log\log u + \sqrt{\frac{13}{24}}\log\log u$$
$$= \frac{3}{4}\log\log u.$$

Vi har alltså

$$\log\left(\frac{1}{|\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)|}\right) \leq \frac{3}{4}\log\log u + O(1).$$

Detta ger att

$$\frac{1}{|\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)|} \leq C(\log u)^{\frac{3}{4}}.$$

för någon positiv konstant C. Med dessa två begränsningar får vi slutligen att

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{y<p\leq x}\frac{1}{p^{1+i\alpha}}\right| &\leq \left|\int_y^x -\frac{\zeta'}{\zeta}(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)\frac{\mathrm{d}u}{u\log^2 u}\right| + O(1) \\
&\leq \int_y^x \frac{|\zeta'(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)|}{|\zeta(1+\frac{1}{\log u}+i\alpha)|}\frac{\mathrm{d}u}{|u\log^2 u|} + O(1) \\
&\leq C\int_y^x \frac{\log^2|\alpha|(\log u)^{\frac{3}{4}}}{u\log^2 u}\mathrm{d}u + O(1) \\
&= C\log^2|\alpha|\left[-\frac{4}{(\log x)^{\frac{1}{4}}} + \frac{4}{(\log y)^{\frac{1}{4}}}\right] + O(1) \\
&\leq C\log^2|\alpha|\frac{4}{(\log y)^{\frac{1}{4}}} + O(1) = C\log^2|\alpha|\frac{4}{(\log^{12}|\alpha|)^{\frac{1}{4}}} + O(1) \\
&= \frac{4C}{\log|\alpha|} + O(1) = O(1),
\end{aligned}$$

och vi är klara. □

3.4 Halász sats

Vi är nu intresserade av att granska det minsta pretentiösa avståndet mellan en multiplikativ funktion f och n^{it} där $t \in \mathbb{R}$ är begränsad. För att förenkla detta inför vi följande notation

$$\mathrm{Min}_f(x,T) = \min_{|t|\leq T}\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2.$$

Vi har nu följande lemma.

Lemma 3.4.1. Låt f vara en multiplikativ funktion så att $|f(n)| \leq 1$ för alla n. Då gäller att

$$\max_{|t|\leq T}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \asymp \log x\exp(-\mathrm{Min}_f(x,T)).$$

Bevis. Från lemma 3.2.2 har vi att

$$\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \leq K\log x\exp(-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2),$$

för någon positiv konstant K. Detta ger att

$$\max_{|t|\leq T}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \leq K\log x\exp(\max_{|t|\leq T} -\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2)$$
$$= K\log x\exp(-\mathrm{Min}_f(x,T)),$$

ty $\max(-A) = -\min(A)$ för alla $A \in \mathbb{R}$. Vi får också att

$$K\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \geq \log x \exp(-\mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2),$$

där K är en positiv konstant. Alltså har vi att

$$K \max_{|t|\leq T}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \geq \log x \exp(-\mathrm{Min}_f(x,T)),$$

vilket ger att

$$\max_{|t|\leq T}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \asymp \log x \exp(-\mathrm{Min}_f(x,T)).$$

□

Sats 3.4.1 (Halász, Generella fallet)**.** Låt f vara en multiplikativ funktion med $|f(n)| \leq 1$ för alla n, och $|\Lambda_f(n)| \leq \kappa|\Lambda(n)|$, där $\kappa > 0$, för alla n. Då har vi

$$\sum_{n\leq x} f(n) \ll (1+M)e^{-M}x(\log x)^{\kappa-1} + \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{\kappa},$$

där

$$e^{-M}(\log x)^{\kappa} := \max_{|t|\leq(\log x)^{\kappa}}\left|\frac{F(1+\frac{1}{\log x}+it)}{1+\frac{1}{\log x}+it}\right|.$$

är en implicit definition av M.

Bevis. Se [7, s. 87]. □

Sats 3.4.2 (Halász, Speciella fallet)**.** Låt f vara en multiplikativ funktion med $|f(n)| \leq 1$ för alla n, och $|\Lambda_f(n)| \leq |\Lambda(n)|$. Då

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) \ll (1+\mathrm{Min}_f(x,\log x))e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)} + \frac{\log\log x}{\log x}.$$

Bevis. Vi använder sats 3.4.1 och lemma 3.4.1. Låt $\kappa = 1$ i sats 3.4.1. Då har vi

$$\sum_{n\leq x} f(n) \ll (1+M)e^{-M}x + \frac{x}{\log x}\log\log x,$$

eller med andra ord att

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leq x} f(n) \ll (1+M)e^{-M} + \frac{\log\log x}{\log x}.$$

Vi har nu att $e^{-M} \ll e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)}$ eftersom

$$e^{-M} = \frac{1}{\log x}\max_{|t|\leq\log x}\left|\frac{F(1+\frac{1}{\log x}+it)}{1+\frac{1}{\log x}+it}\right| \leq \frac{1}{\log x}\max_{|t|\leq\log x}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right|,$$

ty

$$|1+\frac{1}{\log x}+it| \geq 1+\frac{1}{\log x} \geq 1,$$

där $x \geq 3$ och naturligtvis $|z| \geq \mathrm{Re}(z)$. Från lemma 3.4.1 får vi nu att

$$\begin{aligned} e^{-M} &\leq \frac{1}{\log x}\max_{|t|\leq\log x}\left|F(1+\frac{1}{\log x}+it)\right| \ll \frac{1}{\log x}\log x\exp(-\mathrm{Min}_f(x,\log x)) \\ &= \exp(-\mathrm{Min}_f(x,\log x)), \end{aligned}$$

vilket söktes. Detta ger nu att

$$e^{-M} \leq K \exp(-\mathrm{Min}_f(x, \log x)),$$

där $K > 0$ är en konstant. Vi kan utan inskränkning anta att $K > 1$. Detta ger att

$$M \geq \mathrm{Min}_f(x, \log x) - \log K.$$

Vidare har vi att $(1+M)e^{-M}$ är minskande i M, ty det gäller ju att

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}M}(1+M)e^{-M} = -Me^{-M} < 0.$$

Detta ger att

$$\begin{aligned}(1+M)e^{-M} &\leq (1+\mathrm{Min}_f(x,\log x) - \log K)e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)+\log K} \\ &= K(1+\mathrm{Min}_f(x,\log x))e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)} - K\log K e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)} \\ &\leq K(1+\mathrm{Min}_f(x,\log x))e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)} \ll 1+\mathrm{Min}_f(x,\log x))e^{-\mathrm{Min}_f(x,\log x)},\end{aligned}$$

vilket söktes. □

Lemma 3.4.2. Låt $T \geq 1$, och $|f(n)| \leq 1$ för alla n. Då har vi att

$$\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 \mathrm{d}t \right| \leq 2 \log\log x + O(1).$$

Bevis. Vi har att

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{2T} \sum_{p \leq x} \int_{-T}^{T} \frac{1 - \mathrm{Re}(f(p)p^{-it})}{p} \mathrm{d}t.$$

Vidare har vi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2T} \sum_{p\leq x} \left\{ \int_{-T}^{T} \frac{1}{p}\mathrm{d}t - \frac{1}{p}\int_{-T}^{T} \mathrm{Re}(f(p)p^{-it})\mathrm{d}t \right\} \\ &= \frac{1}{2T} \sum_{p\leq x} \left\{ \frac{2T}{p} - \frac{1}{p\log p} \mathrm{Re}\left[f(p)\left(ie^{-iT\log p} - ie^{iT\log p}\right)\right] \right\}.\end{aligned}$$

Vi använder nu triangelolikheten och noterar att för varje $z \in \mathbb{C}$ gäller att $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$. Detta ger att

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathbb{D}(f(n), n^{it}; x)^2 \mathrm{d}t \right| &\leq \frac{1}{2T} \sum_{p\leq x} \left\{ \frac{2T}{p} + \frac{1}{p\log p} \left|\mathrm{Re}\left[f(p)\left(ie^{-iT\log p} - ie^{iT\log p}\right)\right]\right| \right\} \\ &\leq \frac{1}{2T} \sum_{p\leq x} \left\{ \frac{2T}{p} + \frac{1}{p\log p} \left|f(p)\left(ie^{-iT\log p} - ie^{iT\log p}\right)\right| \right\} \\ &\leq \frac{1}{2T} \sum_{p\leq x} \frac{2T+2}{p} = (1+\frac{1}{T})\log\log x + O(1) \leq 2\log\log x + O(1).\end{aligned}$$

□

3.5 Primtalssatsen

Följande lemma ger en asymptotisk begränsning av $\psi(x) - x$ givet en asymptotisk begränsning av $M(x)$.

Lemma 3.5.1. Det gäller att

$$M(x) \ll \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{13} \implies \psi(x) - x \ll \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15}.$$

Bevis. Se appendix A.10. $\square$

Vi kan nu bevisa primtalssatsen.

Sats 3.5.1 (Primtalssatsen)**.** Det gäller att

$$\psi(x) - x \ll \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15}.$$

Bevis. Notera att

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(1, n^{it}; x)^2 + \mathbb{D}(\mu(n), n^{it}; x)^2 &= \sum_{p\le x} \frac{1 - \operatorname{Re}\left(p^{-it}\right)}{p} + \sum_{p\le x} \frac{1 - \operatorname{Re}\left(\mu(p)p^{-it}\right)}{p} \\ &= 2\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = 2\log\log x + O(1),\end{aligned}$$

ty $\mu(p) = -1$. Så med sats 3.3.1 får vi

$$-\mathbb{D}(1, n^{it}; x)^2 \ge -\log\log x - 12\log\log(4 + |t|) \ge -\log\log x - 12\log\log T,$$

där $|t| \ge \frac{1}{\alpha_0}$ och $T \ge 4 + |t|$. Så

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(\mu(n), n^{it}; x)^2 &= 2\log\log x + O(1) - \mathbb{D}(1, n^{it}; x)^2 \\ &\ge \log\log x - 12\log\log T + O(1).\end{aligned}$$

Eftersom olikheten gäller för alla t med $|t| \le T - 4 \le T$ får vi att

$$\operatorname{Min}_\mu(x, T) \ge \log\log x - 12\log\log T + O(1),$$

eller med andra ord att

$$-\operatorname{Min}_\mu(x, T) \le -\log\log x + 12\log\log T - O(1).$$

Från lemma 3.4.2 har vi

$$\operatorname{Min}_\mu(x, \log x) \le 2\log\log x + O(1),$$

eftersom minimum är mindre än medelvärdet, där integralen i lemma 3.4.2 är medelvärdet. Enligt (A.6.3) kan vi använda sats 3.4.2 som ger

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\mu(n) \ll (1 + \operatorname{Min}_\mu(x, \log x))\exp(-\operatorname{Min}_\mu(x, \log x)) + \frac{\log\log x}{\log x}.$$

Så med föregående olikheter får vi

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\le x}\mu(n) &\ll (1 + 2\log\log x + K_1)\exp(-\log\log x + 12\log\log\log x - K_2) + \frac{\log\log x}{\log x} \\ &= e^{-K_2}(1 + 2\log\log x + K_1)\frac{1}{\log x}(\log\log x)^{12} + \frac{\log\log x}{\log x} \\ &= \frac{e^{-K_2}(1 + K_1)(\log\log x)^{12}}{\log x} + \frac{2(\log\log x)^{13}}{\log x} + \frac{\log\log x}{\log x} \\ &\ll \frac{(\log\log x)^{13}}{\log x},\end{aligned}$$

där K_1 och K_2 är konstanter. Nu erhåller vi med lemma 3.5.1

$$M(x) \ll \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{13} \implies \psi(x) - x \ll \frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15},$$

vilket skulle bevisas. $\square$

På samma sätt som i sats 2.4.1 erhålles en begränsning till $\pi(x) - \frac{x}{\log x}$.

Bilaga A

Appendix

A.1 Partiell summation

Proposition A.1.1. Låt $f \in C^1(\mathbb{R})$, då

$$\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t, \tag{A.1.1}$$

där $A(x) = \sum_{n\leq x} a_n$.

Bevis. Vi har att

$$\begin{aligned}
\sum_{y<n\leq x} a_n f(n) &= \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} a_n f(n) = \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} (A(n)-A(n-1))f(n) \\
&= \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(n)f(n) - \sum_{n=\lfloor y\rfloor}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)f(n+1) \\
&= \sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)(f(n)-f(n+1)) + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) \\
&= -\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} A(n)\int_n^{n+1} f'(t)\mathrm{d}t + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) \\
&= -\sum_{n=\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor-1} \int_n^{n+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) \\
&= -\int_{\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)\mathrm{d}t + A(\lfloor x\rfloor)f(\lfloor x\rfloor) - A(\lfloor y\rfloor)f(\lfloor y\rfloor+1) \\
&= -\int_{\lfloor y\rfloor+1}^{\lfloor x\rfloor} A(t)f'(t)\mathrm{d}t + A(x)f(x) - \int_{\lfloor x\rfloor}^{x} A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&\quad - A(y)f(y) - \int_y^{\lfloor y\rfloor+1} A(t)f'(t)\mathrm{d}t \\
&= A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

Man kan också bevisa detta med hjälp av Riemann-Stieltjes integralen, som finns beskrivet i kapitel 6 av [16]. Vi återger dock att

$$\int_a^b f\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\mathrm{d}x,$$

där α är en monotont växande funktion på $[a,b]$, α' är Riemann-integrerbar på $[a,b]$, och f är en begränsad funktion på $[a,b]$. Av detta följer med partiell integration att

$$\int_a^b f(x)dg(x) = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)df(x). \tag{A.1.2}$$

A.2 Gamma-funktionen

I denna del har främsta källan varit [14] och alla utelämnade detaljer finns att hitta där.

Definition A.2.1. Låt

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1} e^{s/n} \tag{A.2.1}$$

där $\gamma = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n \approx 0.577$ är Euler-Mascheronis konstant (se också proposition A.5.5). En alternativ definition giltig med $\sigma > 0$ är

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx. \tag{A.2.2}$$

Proposition A.2.1. Några viktiga identiteter för $\Gamma(s)$:
(a) $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$

(b) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$

(c) $\Gamma(s)\Gamma(s+\frac{1}{2}) = 2^{1-2s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2s)$

(d) $\dfrac{\Gamma(\frac{1}{2}(1-s))}{\Gamma(\frac{1}{2}s)}) = 2^s\pi^{-\frac{1}{2}}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(1-s)$

Bevis. (a) Vi har att

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = \frac{se^{-\gamma}}{s+1}\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{s+1}{n}\right)^{-1}e^{(s+1)/n}}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{s}{n}\right)^{-1}e^{s/n}} = \frac{se^{-\gamma}}{s+1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{1+\dfrac{s}{n}}{1+\dfrac{s+1}{n}}e^{1/n}$$

$$= e^{-\gamma}\frac{s}{s+1}\lim_{N\to\infty}\left(e^{\sum_{n=1}^{N}n^{-1}}\prod_{n=1}^{N}\frac{n+s}{n+s+1}\right) = \frac{s}{s+1}\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}\frac{n+1}{n}\frac{n+s}{n+s+1},$$

enligt definitionen av γ. Produkten är teleskoperande:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}\frac{n+s}{n+s+1} = 2\frac{s+1}{s+2}\frac{3}{2}\frac{s+2}{s+3}... = s+1,$$

så

$$\frac{\Gamma(s+1)}{\Gamma(s)} = s \iff \Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

vilket skulle visas. För att visa (b) börjar vi med att definiera Beta-funktionen,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad \mathrm{Re}(p), \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{A.2.3}$$

Det går att visa att $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, med en teknisk men elementär kalkyl, vilken vi utelämnar. Antag nu att $0 < \mathrm{Re}(s) < 1$. Vi kan då använda (A.2.3). Vi får att

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{-s}dx = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^s \frac{dx}{x}.$$

Variabelbytet $t = x/(1-x)$ ger oss

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}dt}{t+1}.$$

Låt nu $t = \mathrm{Re}(z)$ och betrakta cirkeln C med radie R och centrum i origo. Då är

$$\int_C \frac{z^{s-1}}{1+z}dz = 2\pi i(-1)^{s-1} = 2\pi i e^{\pi i(s-1)}. \tag{A.2.4}$$

Vi låter nu C' vara den negativt orienterade cirkeln med radie $\epsilon < 1$ och . Vi kan då skriva (A.2.4) som

$$\int_C \frac{z^{s-1}}{1+z}dz + \int_{C'} \frac{z^{s-1}}{1+z}dz + \int_R^\epsilon \frac{y^{s-1}}{1+y}dz + \int_\epsilon^R \frac{y^{s-1}}{1+y}dz.$$

Polär parametring av z i de två första integralerna ger då vi låter R och ϵ gå mot ∞ respektive 0 att dessa är försumbara. Med parametriseringarna $z = ye^{2\pi i}$ respektive $z = y = ye^{0i}$ får vi att

$$2\pi i e^{\pi i(s-1)} = e^{2\pi i s}\int_\infty^0 \frac{y^{s-1}}{1+y}dy + \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{1+y}dy$$

och efter omflyttning

$$\int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{1+y}dy = \frac{2\pi i}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}}$$

vilket bevisar att $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin \pi s}$ i det givna området, och analytisk fortsättning ger oss att (b) är sann för alla $z \notin \mathbb{Z}$. För (c) använder vi igen Beta-funktionen:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = B(z,z) = \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{s-1}dt &= \left\{t = \frac{1+x}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \left(\frac{1+x}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1-x}{2}\right)^{s-1}dx \\ &= \frac{1}{2^{2s-1}}\int_{-1}^1 \left(1-x^2\right)^{s-1}dx.\end{aligned}$$

Vi får att

$$2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s) = 2\Gamma(2s)\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{s-1}dx. \tag{A.2.5}$$

Å andra sidan är,

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \int_0^1 t^{2p-2}\left(1-t^2\right)^{q-1}2tdt,$$

och med $p = \frac{1}{2}$ och $q = s$ får vi att

$$B(\tfrac{1}{2}, s) = 2 \int\limits_0^1 \left(1 - t^2\right)^{s-1}. \tag{A.2.6}$$

Kombinerar vi nu (A.2.5) och (A.2.6) får vi att

$$\begin{aligned} 2^{2s-1}\Gamma(s)\Gamma(s) = \Gamma(2s)B(\tfrac{1}{2}, s) = \Gamma(2s)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})} \\ \Longrightarrow \Gamma(s)\Gamma(s+\tfrac{1}{2}) = 2^{1-2s}\Gamma(\tfrac{1}{2})\Gamma(2s), \end{aligned}$$

och påståendet följer efter att $\Gamma(\frac{1}{2})$ har beräknats till $\sqrt{\pi}$. (d) följer nu från att kombinera (a), (b) och (c). □

Proposition A.2.2. (Stirlings formel) Låt $-\pi + \epsilon < \arg s < \pi - \epsilon$. Då gäller, när $|s| \to \infty$, att

$$\log \Gamma(s) = s \log s - s + \tfrac{1}{2} \log \frac{2\pi}{s} + O\left(\frac{1}{|s|}\right) \tag{A.2.7}$$

samt att

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log s + O\left(\frac{1}{|s|}\right). \tag{A.2.8}$$

A.3 Eulers summationsformel

Proposition A.3.1. Om f har kontinuerlig derivata f' på intervallet $[y, x]$ där $0 < y < x$, så

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = \int_y^x f(t)\mathrm{d}t + \int_y^x \{t\}f'(t)\mathrm{d}t - f(x)\{x\} + f(y)\{y\}. \tag{A.3.1}$$

Bevis. Vi har att

$$\begin{aligned} \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = \int_{n-1}^n (n-1)f'(t)\mathrm{d}t = (n-1)(f(n) - f(n-1)) \\ = nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n). \end{aligned}$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned} \int_{\lfloor y \rfloor}^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t &= \sum_{n=\lfloor y \rfloor+1}^{\lfloor x \rfloor} \int_{n-1}^n \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=\lfloor y \rfloor+1}^{\lfloor x \rfloor} (nf(n) - (n-1)f(n-1) - f(n)) \\ &= \sum_{n=\lfloor y \rfloor+1}^{\lfloor x \rfloor} (nf(n) - (n-1)f(n-1)) - \sum_{y<n\leq x} f(n) \\ &= \lfloor x \rfloor f(\lfloor x \rfloor) - \lfloor y \rfloor f(\lfloor y \rfloor) - \sum_{y<n\leq x} f(n). \end{aligned}$$

Så

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_{\lfloor y \rfloor}^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + \lfloor x \rfloor f(\lfloor x \rfloor) - \lfloor y \rfloor f(\lfloor y \rfloor).$$

Nu har vi att

$$\begin{aligned} \int_{\lfloor y \rfloor}^{\lfloor x \rfloor} \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t &= \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t - \int_{\lfloor x \rfloor}^x \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + \int_{\lfloor y \rfloor}^y \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t - \lfloor x \rfloor (f(x) - f(\lfloor x \rfloor)) + \lfloor y \rfloor (f(y) - f(\lfloor y \rfloor)). \end{aligned}$$

Därmed gäller

$$\sum_{y<n\leq x} f(n) = -\int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y).$$

Med partiell integration får vi nu att

$$\int_y^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) + yf(y) + \int_y^x tf'(t)\mathrm{d}t = 0,$$

vilket ger att

$$\begin{aligned}\sum_{y<n\leq x} f(n) &= \int_y^x f(t)\mathrm{d}t - xf(x) + yf(y) + \int_y^x tf'(t)\mathrm{d}t \\ &\quad - \int_y^x \lfloor t \rfloor f'(t)\mathrm{d}t + \lfloor x \rfloor f(x) - \lfloor y \rfloor f(y) \\ &= \int_y^x f(t)\mathrm{d}t - \{x\}f(x) + \{y\}f(y) + \int_y^x \{t\}f'(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

□

A.4 Bevis till grundläggande teori om Dirichletserier

Bevis av proposition 3.1.1. Se [1, s. 24-40]. □

Bevis av proposition 3.1.2.i. Om $n = 1$ så $\mu(n) = 1$, så anta $n > 1$. Låt $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, då

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{0\leq l_1+l_2+\cdots+l_k\leq k, \forall i.\, l_i\in\{0,1\}} \mu(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_k^{l_k}) \\ &= \sum_{0\leq l_1+l_2+\cdots+l_k\leq k, \forall i.\, l_i\in\{0,1\}} (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_k} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{l_1+l_2+\cdots+l_k=j, \forall i.\, l_i\in\{0,1\}} (-1)^j \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^j = (1-1)^k = 0.\end{aligned}$$

Detta visar att $\sum_{d|n} \mu(d) = \delta(n)$. Detta ger att

$$\delta(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\mathbb{1}(n/d) = (\mu * \mathbb{1})(n),$$

och vi är klara. □

Bevis av proposition 3.1.2.ii. Vi utnyttjar proposition 3.1.2.i samt associativitet. Vi får

$$f = g * \mathbb{1} \implies f * \mu = g * \mathbb{1} * \mu = g * \delta = g,$$

och

$$g = f * \mu \implies g * \mathbb{1} = f * \mu * \mathbb{1} = f * \delta = f,$$

vilket skulle bevisas. □

Bevis av proposition 3.1.2.iii. Låt $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, då $\log n = \sum_{i=1}^{k} a_i \log p_i$. Vidare gäller

$$\begin{aligned}(\Lambda * \mathbb{1})(n) = \sum_{d|n} \Lambda(n) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_i} \Lambda(p_i^m) &= \sum_{i=1}^{k} \sum_{m=1}^{a_i} \log p_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \log p_i = \log n.\end{aligned}$$

Så med Möbiusinversion erhåller vi

$$\Lambda(n) = \sum_{d|n} \log(d)\mu(n/d).$$

Detta bevisar den första likheten. För den andra utnyttjar vi definitionen av τ. Det gäller nämligen att

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = (\mathbb{1} * \mathbb{1})(n), \tag{A.4.1}$$

så med Möbiusinversion erhåller vi

$$1 = \mathbb{1}(n) = \tau * \mu = \sum_{d|n} \tau(d)\mu(n/d),$$

vilket skulle bevisas. □

Bevis av proposition 3.1.3. Se [1, s. 226]. □

Bevis av proposition 3.1.4. Vi har att

$$F(s)G(s) = \left(\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \right) \left(\sum_{m \geq 1} \frac{g(m)}{m^s} \right) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s}.$$

Vi har nu att mn löper över $\mathbb{N}$ och därmed får vi att

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{f(n)g(m)}{(nm)^s} = \sum_{l \geq 1} \frac{1}{l^s} \sum_{nm=l} f(n)g(m) = \sum_{l \geq 1} \frac{(f * g)(l)}{l^s}.$$

□

Bevis av proposition 3.1.5.i. Vi har att

$$F(s)G(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(f * f^{-1})(n)}{n^s} = \sum_{n \geq 1} \frac{\delta(n)}{n^s} = 1,$$

vilket söktes. □

Bevis av proposition 3.1.5.ii. Se [1, p. 236]. □

Bevis av proposition 3.1.5.iii. Låt

$$G(s) = \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s}.$$

Vi har nu att

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda_f(n)}{n^s} \right| \leq \kappa \sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n)}{n^\sigma} &= \kappa \sum_{n \geq 2} \frac{(\log * \mu)(n)}{n^\sigma} \\ &= \kappa \zeta'(\sigma) \left(\frac{1}{\zeta(\sigma)} - 1 \right) = O(1).\end{aligned}$$

Vidare har vi att

$$|F(s)| \leq \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\sigma} = O(1).$$

Enligt proposition 3.1.3 har vi alltså att

$$F(s)G(s) = \sum_{n\geq 2} \frac{(f * \Lambda_f)(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 2} \frac{(f * f^{-1} * f^D)(n)}{n^s} = \sum_{n\geq 2} \frac{f^D(n)}{n^s} = -F'(s),$$

och vi är klara. □

A.5 Grundläggande analytisk talteori

Proposition A.5.1. Om $x \geq 2$ så

$$\log\lfloor x\rfloor! = x\log x - x + O(\log x), \tag{A.5.1}$$

och

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x\log x - x + O(\log x). \tag{A.5.2}$$

Bevis. Notera att

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor &= \sum_{k_1\leq x} \Lambda(k_1) \sum_{k_2\leq \frac{x}{k_1}} 1 = \sum_{k_1 k_2\leq x} \Lambda(k_1)\mathbb{1}(k_2) \\ &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \Lambda(d)\mathbb{1}(n/d) = \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} \Lambda(n) = \sum_{n\leq x} \log n = \log\lfloor x\rfloor!.\end{aligned}$$

Så det andra påståendet följer av det första. Vi bevisar nu det första påståendet. Sätt $f(t) = \log t$ och $y = 1$ i (A.3.1). Då gäller

$$\begin{aligned}\log\lfloor x\rfloor! = \sum_{n\leq x} \log n &= \int_1^x \log(t)\mathrm{d}t + \int_1^x \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t - \{x\}\log x \\ &= x\log x - x + 1 + \int_1^x \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t + O(\log x) \\ &= x\log x - x + O(\log x).\end{aligned}$$

ty

$$\left|\int_1^x \frac{\{t\}}{t}\mathrm{d}t\right| \leq \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \log x = O(\log x),$$

och

$$1 + O(\log x) = O(\log x).$$

□

Proposition A.5.2. Låt $x \geq 3$, då gäller att

$$\sum_{n\leq x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

där A är en konstant.

Bevis. Låt $f(t) = \frac{\log t}{t}$ och $y = 1$ i (A.3.1), då

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} \frac{\log n}{n} &= \int_1^x \frac{\log t}{t} \mathrm{d}t + \int_1^x \{t\} \left(\frac{\log t}{t}\right)' \mathrm{d}t - \frac{\log x}{x}\{x\} + \frac{\log 1}{1}\{1\} \\
&= \left[\frac{1}{2}\log^2 t\right]_1^x - \int_1^x \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t + O\left(\frac{\log x}{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\log^2 x - \int_1^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t + \int_x^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t + O\left(\frac{\log x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Vi har att

$$\begin{aligned}
\left|\int_1^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t\right| &\le \int_1^\infty \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-\log t}{t} - \frac{2}{t}\right] = \frac{\log 1}{1} + \frac{2}{1} = 2,
\end{aligned}$$

så integralen existerar och vi kan sätta

$$A := -\int_1^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned}
0 &\le \int_x^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left|\int_x^\infty \{t\} \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t\right| \\
&\le \int_x^\infty \left(\frac{\log t - 1}{t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[\frac{-\log t}{t} - \frac{2}{t}\right]_x^\infty = \frac{\log x}{x} + \frac{2}{x} = O\left(\frac{\log x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Slutligen har vi

$$\sum_{n \le x} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 x + A + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

vilket skulle bevisas. □

Proposition A.5.3. Låt $a(n)$ vara en icke-negativ aritmetisk funktion så att

$$\sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = x \log x + O(x), \quad \forall x \ge 1,$$

då

$$\sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} = \log x + O(1), \tag{A.5.3}$$

och

$$\sum_{n \le x} a(n) \le Cx, \quad \forall x \ge 1, \tag{A.5.4}$$

där C är en positiv konstant.

Bevis. Vi bevisar först (A.5.4) och för detta bevisar vi

$$S(x) - 2S\left(\frac{x}{2}\right) \le T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right),$$

där

$$S(x) := \sum_{n \le x} a(n) \quad \text{och} \quad T(x) := \sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor.$$

Vi har att

$$\begin{aligned}T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= \sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - 2 \sum_{n \le \frac{x}{2}} a(n) \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor \\ &= \sum_{n \le \frac{x}{2}} a(n) \left(\left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{x}{2n} \right\rfloor \right) + \sum_{\frac{x}{2} < n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor .\end{aligned}$$

Notera nu att

$$\lfloor 2y \rfloor - 2\lfloor y \rfloor = \begin{cases} 0, & \text{om } \{y\} < \frac{1}{2} \\ 1, & \text{om } \{y\} \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Så den vänstra summan är icke-negativ och alltså får vi att

$$T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) \ge \sum_{\frac{x}{2} < n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{\frac{x}{2} < n \le x} a(n) = S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right),$$

ty vi har ju att $\frac{x}{2} < n \le x$ om och endast om $1 \le \frac{x}{n} < 2$. Enligt förutsättningen har vi också att

$$\begin{aligned}T(x) - 2T\left(\frac{x}{2}\right) &= x \log x + O(x) - 2\left(\frac{x}{2} \log\left(\frac{x}{2}\right) + O\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= O(x) \le Kx, \quad \forall x \ge 1,\end{aligned}$$

där K är en positiv konstant. Detta ger att

$$\begin{aligned}S(x) - S\left(\frac{x}{2}\right) &\le Kx \\ S\left(\frac{x}{2}\right) - S\left(\frac{x}{4}\right) &\le K\frac{x}{2} \\ S\left(\frac{x}{4}\right) - S\left(\frac{x}{8}\right) &\le K\frac{x}{4} \\ S\left(\frac{x}{8}\right) - S\left(\frac{x}{16}\right) &\le K\frac{x}{8} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Notera att $S\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$ för $x > 2^n$ ty då har summan inga termer. Med induktion får vi

$$S(x) \le Kx \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right) = 2Kx,$$

vilket visar (A.5.4) med $C = 2K$. Vi kan nu bevisa (A.5.3)

$$\begin{aligned}T(x) &= \sum_{n \le x} a(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \le x} a(n) \left(\frac{x}{n} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} + O\left(\sum_{n \le x} a(n) \right) = x \sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} + O(x).\end{aligned}$$

Detta är ekvivalent med

$$\sum_{n \le x} \frac{a(n)}{n} = \frac{T(x)}{x} + O(1) = \frac{x \log x + O(x)}{x} + O(1) = \log x + O(1),$$

vilket skulle bevisas. □

Proposition A.5.4. Om $x \ge 2$ så

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1).$$

Bevis. Vi använder proposition A.5.1 och Shapiros proposition. Det gäller att

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=\sum_{p}\sum_{\substack{m=1\\p^m\leq x}}^{\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p.$$

Vi har nu att $p^m\leq x$ implicerar att $p\leq x$ och att $\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor=0$ då $p>x$, så vi får

$$\sum_{p}\sum_{\substack{m=1\\p^m\leq x}}^{\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p=\sum_{p\leq x}\sum_{m=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p=\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p+\sum_{p\leq x}\sum_{m=2}^{\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p.$$

Vi bevisar nu att den högra summan är $O(x)$

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\sum_{m=2}^{\infty}\left\lfloor\frac{x}{p^m}\right\rfloor\log p&\leq\sum_{p\leq x}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{x}{p^m}\log p=x\sum_{p\leq x}\log p\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{p^m}\\&=x\sum_{p\leq x}\log p\frac{1}{p^2}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}=x\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p(p-1)}\\&\leq x\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)}=O(x),\end{aligned}$$

ty $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log n}{n(n-1)}\approx 1.22625$ konvergerar. Vi har alltså

$$\sum_{n\leq x}\Lambda(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p+O(x).$$

Med hjälp av (A.5.2) får vi nu

$$\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p=x\log x-x+O(\log x)-O(x)=x\log x+O(x).$$

Låt nu

$$\Lambda_1(n)=\begin{cases}\log p, & \text{om } n=p\\ 0, & \text{annars.}\end{cases}$$

Då

$$\sum_{p\leq x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor\log p=\sum_{n\leq x}\Lambda_1(n)\left\lfloor\frac{x}{n}\right\rfloor=x\log x+O(x),$$

vilket ger med Shapiros proposition att

$$\sum_{n\leq x}\frac{\Lambda_1(n)}{n}=\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1).$$

□

Bevis av proposition 3.2.1. Låt

$$A(x)=\sum_{p\leq x}\frac{\log p}{p},$$

och

$$a(n)=\begin{cases}1, & \text{om } n=p\\ 0, & \text{annars.}\end{cases}$$

Då är
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n}\qquad\text{och}\qquad A(x)=\sum_{n\le x}\frac{a(n)\log n}{n}.$$
Vi har nu genom partiell summering (A.1.1)
$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n}\frac{\log n}{\log n}&=\frac{A(x)}{\log x}+\int_1^x A(t)\frac{1}{t\log^2 t}\mathrm{d}t\\ =\sum_{n\le x}\frac{a(n)}{n}\frac{\log n}{\log n}&=\frac{A(x)}{\log x}+\int_2^x A(t)\frac{1}{t\log^2 t}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$
ty vi har ju att $A(x)=0$ då $x<2$. Vidare har vi enligt proposition A.5.4 att
$$A(x)=\log x+R(x),\ \text{där } R(x)=O(1),$$
så vi får
$$\begin{aligned}\sum_{p\le x}\frac{1}{p}&=\frac{\log x+O(1)}{\log x}+\int_2^x\frac{\log t+R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t\\ &=1+O\left(\frac{1}{\log x}\right)+\log\log x-\log\log 2+\int_2^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Det gäller nu att
$$\int_2^x\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t=\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t-\int_x^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t.$$
Integralerna konvergerar eftersom
$$\left|\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t\right|\le K\int_2^\infty\frac{1}{t\log^2 t}\mathrm{d}t=\frac{K}{\log 2},$$
där K är en positiv konstant. Vidare har vi att
$$\left|\int_x^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t\right|\le\frac{K}{\log x}=O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$
Slutligen har vi alltså
$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+C+O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$
där
$$C=1-\log\log 2+\int_2^\infty\frac{R(t)}{t\log^2 t}\mathrm{d}t.$$
□

Proposition A.5.5. Låt $x\ge 1$, då gäller att
$$\sum_{n\le x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+O\left(\frac{1}{x}\right),$$
där γ är Euler-Mascheronis konstant.

Bevis. Sätt $f(t) = \frac{1}{t}$ och $y = 1$ i (A.3.1). Då gäller att

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{1 < n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 + \int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t - \int_1^x \{t\} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t - \{x\} \frac{1}{x} + \{1\}1 \\
&= \log x - \int_1^x \{t\} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \\
&= \log x - \int_1^\infty \{t\} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t + \int_x^\infty \{t\} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Nu har vi att

$$\left| \int_1^\infty \{t\} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t \right| \leq \int_1^\infty \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = 1,$$

och

$$0 \leq \int_x^\infty \frac{\{t\}}{t^2} \mathrm{d}t \leq \int_x^\infty \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t = \frac{1}{x} = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Så

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

där

$$C := 1 - \int_1^\infty \frac{\{t\}}{t^2} \mathrm{d}t.$$

Vi ser också att

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(-\log n + \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} \right) = \lim_{n \to \infty} \left\{ C + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\} = C.$$

□

Proposition A.5.6. Det gäller att

$$\sum_{n \leq x} (\log n - \tau(n) + 2\gamma) = O(\sqrt{x})$$

Bevis. Vi har att

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1 = 2 \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 + \delta_n,$$

där

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{om } n = k^2 \text{ för något } k \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Så

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \tau(n) &= 2 \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 + \sum_{n \leq x} \delta_n \\
&= 2 \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 + \sum_{\substack{n \leq x \\ n = d^2}} 1 \\
&= \delta_x + 2 \sum_{n \leq x} \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} 1 + \sum_{d < \sqrt{x}} 1 \\
&= \delta_x + 2 \sum_{d < \sqrt{x}} \sum_{\substack{d^2 < n \leq x \\ d|n}} 1 + \sum_{d < \sqrt{x}} 1.
\end{aligned}$$

Där det sista steget följer av att

$$(n \leq x) \wedge (d \mid n) \wedge (d < \sqrt{n}) \Leftrightarrow (d < \sqrt{x}) \wedge (d^2 < n \leq x) \wedge (d \mid n).$$

Nu har vi

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \tau(n) &= \delta_x + \sum_{d<\sqrt{x}} \left(1 + 2 \sum_{\substack{d^2<n\leq x \\ d|n}} 1\right) \\ &= \delta_x + \sum_{d<\sqrt{x}} \left(1 + 2\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - 2d\right),\end{aligned}$$

ty

$$\sum_{\substack{d^2<n\leq x \\ d|n}} 1 = \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor - d,$$

eftersom heltalen n med $d^2 < n \leq x$ och $d \mid n$ är precis

$$d(d+1), d(d+2), \ldots, dl$$

där l är det största heltal som är mindre eller lika med $\frac{x}{d}$, alltså $l = \lfloor \frac{x}{d} \rfloor$ enligt definition. Antalet sådana tal är alltså $\lfloor \frac{x}{d} \rfloor - d$. Vi har nu

$$\begin{aligned}\delta_x + \sum_{d<\sqrt{x}} \left(1 + 2\lfloor \frac{x}{d} \rfloor - 2d\right) &= \delta_x + \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 2 \sum_{d<\sqrt{x}} \left(\frac{x}{d} - d + O(1)\right) \\ &= \delta_x + \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 2 \sum_{d<\sqrt{x}} \frac{x}{d} - 2 \sum_{d<\sqrt{x}} d + 2(\lfloor \sqrt{x} \rfloor - \delta_x) O(1) \\ &= 2x \sum_{d<\sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2\frac{(\lfloor \sqrt{x} \rfloor - \delta_x)(\lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1 - \delta_x)}{2} + O(\sqrt{x}) \\ &= 2x \sum_{d<\sqrt{x}} \frac{1}{d} - 2\frac{(\sqrt{x} + O(1))^2}{2} + O(\sqrt{x}) \\ &= 2x \sum_{d<\sqrt{x}} \frac{1}{d} - x + O(\sqrt{x}) \\ &= 2x\left(\log \sqrt{x} + \gamma + O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) - x + O(\sqrt{x}) \\ &= x \log x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),\end{aligned}$$

där det sista följer av proposition A.5.5. Slutligen har vi

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} (\log n - \tau(n) + 2\gamma) &= \sum_{n \leq x} \log n + 2\gamma \lfloor x \rfloor - x \log x - (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \\ &= \log \lfloor x \rfloor! + 2\gamma \lfloor x \rfloor - x \log x - (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}) \\ &= x \log x - x + O(\log x) + 2\gamma x + O(1) - x \log x - 2\gamma x + x + O(\sqrt{x}) \\ &= O(\log x) + O(\sqrt{x}) + O(1) = O(\sqrt{x}),\end{aligned} \tag{A.5.5}$$

se proposition A.5.1. □

A.6 Om Λ_f och Λ_μ

Proposition A.6.1. Det gäller att

$$\Lambda_f(n) = 0 \text{ om } n \neq p^k, k \geq 1,$$

samt

$$\Lambda_f(p) = f(p)\log p.$$

Bevis. Låt f vara en multiplikativ funktion. Vi har då att

$$\sum_{n\geq 1} \frac{f(n)\log n}{n^s} = -F'(s) = \frac{-F'(s)}{F(s)}F(s).$$

Därför gäller att

$$f(n)\log n = \sum_{d|n} \Lambda_f(d) f(n/d).$$

enligt proposition 3.1.4 samt proposition 3.1.5. Detta ger att

$$0 = f(1)\log 1 = \Lambda_f(1)f(1) = \Lambda_f(1),$$

och

$$f(p)\log p = \Lambda_f(1)f(p) + \Lambda_f(p)f(1) = \Lambda_f(p). \tag{A.6.1}$$

Vi har också att

$$\Lambda_f(n) = \sum_{d|n} f(d)\log(d) f^{-1}(n/d),$$

samt

$$\delta(n) = (f * f^{-1})(n) = \sum_{d|n} f(d)f^{-1}(n/d) = \begin{cases} 1 \text{ då } n = 1, \\ 0 \text{ då } n > 1, \end{cases}$$

så om $(m,n) = 1$ har vi att

$$\begin{aligned}
\Lambda_f(mn) &= \sum_{d|mn} \log(d)f(d)f^{-1}(mn/d) = \sum_{d|m}\sum_{t|n} \log(dt)f(dt)f^{-1}(\frac{mn}{dt}) \\
&= \sum_{d|m} f(d)f^{-1}(m/d) \sum_{t|n} f(t)f^{-1}(n/t)(\log d + \log t) \\
&= \sum_{d|m} f(d)f^{-1}(m/d) \left(\log d \left\{ \sum_{t|n} f(t)f^{-1}(n/t) \right\} + \Lambda_f(n) \right) \\
&= \sum_{d|m} f(d)f^{-1}(m/d) \left(\log(d)\delta(n) + \Lambda_f(n)\right) \\
&= \delta(n) \sum_{d|m} \log(d)f(d)f^{-1}(m/d) + \Lambda_f(n)\delta(m) \\
&= \delta(n)\Lambda_f(m) + \delta(m)\Lambda_f(n).
\end{aligned}$$

Om nu $m, n > 1$ och $(m,n) = 1$ så får vi $\Lambda_f(mn) = 0$. Detta ger tillsammans med $\Lambda_f(1) = 0$ att

$$\Lambda_f(n) = 0 \text{ om } n \neq p^k, k \geq 1. \tag{A.6.2}$$

□

Proposition A.6.2. Det gäller att

$$|\Lambda_\mu(n)| = \Lambda(n) \tag{A.6.3}$$

Bevis. Vi har att
$$\Lambda_\mu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(d)\mu^{-1}(n/d)$$
Vidare har vi att $\mu^{-1} = \mathbb{1}$, så
$$\Lambda_\mu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\log(d) = -\Lambda(n),$$
ty
$$\begin{aligned}\Lambda(n) &= \sum_{d|n}\mu(d)\log(n/d) = \log n\sum_{d|n}\mu(d) - \sum_{d|n}\mu(d)\log(d) = \delta(n)\log n - \sum_{d|n}\mu(d)\log d \\ &= -\sum_{d|n}\mu(d)\log d.\end{aligned}$$
□

A.7 Om $\zeta(s)$

Proposition A.7.1. Om $\mathrm{Re}(s) > 0$ och $N \geq 1$, så
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} - s\int_N^\infty \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x + \frac{N^{1-s}}{s-1}.$$
Bevis. Genom Eulers summationsformel får vi
$$\sum_{y<n\leq x}\frac{1}{n^s} = \int_y^x \frac{\mathrm{d}t}{t^s} - s\int_y^x \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t.$$
Låt $y = N$ och $x \to \infty$. Då gäller att
$$\begin{aligned}\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^s} &= \int_N^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^s} - s\int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{-s+1}}{-s+1}\right]_N^\infty - s\int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{t^{-s+1}}{-s+1} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t \\ &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{t\}}{t^{s+1}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$
Vi har nu att $\sum_{n=N+1}^\infty \frac{1}{n^s} = \zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s}$ så
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s\int_N^\infty \frac{\{t\}\mathrm{d}t}{t^{s+1}}.$$
□

Bevis av lemma 3.2.3. i. Från (2.2.6) får vi
$$\zeta(s) = \frac{s}{s-1} - s\int_1^\infty \frac{\{t\}\mathrm{d}t}{t^{s+1}}.$$
Detta ger
$$\begin{aligned}\left|\zeta(s) - \frac{s}{s-1}\right| &= |s|\left|\int_1^\infty \frac{\{t\}\mathrm{d}t}{t^{s+1}}\right| \leq |s|\int_1^\infty \left|\frac{\{t\}}{t^{s+1}}\right|\mathrm{d}t \\ &\leq |s|\int_1^\infty \frac{1}{t^{\sigma+1}}\mathrm{d}t = |s|\left[\frac{t^{-\sigma}}{-\sigma}\right]_1^\infty = \frac{|s|}{\sigma}.\end{aligned}$$
□

Bevis av lemma 3.2.3.ii. Från proposition A.7.1 får vi att

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\lfloor |s| \rfloor + 1} \frac{1}{n^s} - s \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x + \frac{(\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-s}}{s-1}.$$

Så enligt triangelolikheten har vi

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \sum_{n=1}^{\lfloor |s| \rfloor + 1} \frac{1}{n^\sigma} + |s| \left| \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \right| + \left| \frac{(\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-s}}{s-1} \right| \\ &\leq \log(\lfloor |s| \rfloor + 1) + |s| \left| \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \right| + K \left| (\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-s} \right| + O(1), \end{aligned}$$

ty

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + O(1),$$

se proposition A.5.5, och

$$|s-1| \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|s-1|} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|s-1|} \leq K,$$

för någon konstant $K > 0$. Vidare har vi att $\lfloor |s| \rfloor \leq |s| + 1$, så

$$|\zeta(s)| \leq \log(2 + |s|) + |s| \left| \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \right| + K \left| (\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-s} \right| + O(1).$$

Vi ser att

$$\left| (\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-s} \right| = (\lfloor |s| \rfloor + 1)^{1-\sigma} = \frac{1}{(\lfloor |s| \rfloor + 1)^{\sigma - 1}} = O(1),$$

ty $\sigma > 1$. Vi har också att

$$\begin{aligned} \left| \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} \mathrm{d}x \right| &\leq \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{\{x\}}{x^{\sigma+1}} \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma+1}} \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-\sigma}}{-\sigma} \right]_{\lfloor |s| \rfloor + 1}^{\infty} \\ &= \lim_{x \to \infty} \frac{x^{-\sigma}}{-\sigma} + \frac{(\lfloor |s| \rfloor + 1)^{-\sigma}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma(\lfloor |s| \rfloor + 1)^\sigma}. \end{aligned} \tag{A.7.1}$$

Nu har vi alltså

$$|\zeta(s)| \leq \log(2 + |s|) + \frac{|s|}{\sigma(\lfloor |s| \rfloor + 1)^\sigma} + O(1).$$

Notera nu att $\lfloor |s| \rfloor + 1 \geq |s|$ och $\sigma > 1$ så

$$\frac{|s|}{\sigma(\lfloor |s| \rfloor + 1)^\sigma} \leq \frac{1}{\sigma |s|^{\sigma - 1}} = O(1).$$

Därmed gäller

$$|\zeta(s)| \leq \log(2 + |s|) + O(1),$$

och $|\zeta(s)| \ll \log(2 + |s|)$, vilket söktes. □

Bevis av lemma 3.2.3.iii. Det gäller att

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}+\frac{N^{1-s}}{s-1}-s\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.$$

Vi får nu att

$$\begin{aligned}
\zeta'(s)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{-s\log n}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{Ne^{-s\log N}}{s-1}\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right)\\
&=-\sum_{n=1}^{N}\log ne^{-s\log n}+N\left(\frac{-\log Ne^{-s\log N}}{s-1}+\left(\frac{-1}{(s-1)^2}\right)e^{-s\log N}\right)\\
&\quad-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right)\\
&=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^s}-\frac{N^{1-s}\log N}{s-1}-\frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}\\
&\quad-\left(\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x+s\int_N^\infty\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\{x\}e^{(-s-1)\log x})\mathrm{d}x\right)\\
&=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^s}-\frac{N^{1-s}\log N}{s-1}-\frac{N^{1-s}}{(s-1)^2}-\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x+s\int_N^\infty\frac{\{x\}\log x}{x^{s+1}}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Nu sätter vi $N=\lfloor|s|\rfloor+1$ och $\sigma>1$ och börjar uppskatta. Triangelolikheten ger

$$|\zeta'(s)|\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{\log n}{n^\sigma}+\frac{N^{1-\sigma}\log N}{|s-1|}+\frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|^2}+\left|\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right|+|s|\left|\int_N^\infty\frac{\{x\}\log x}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right|.$$

Enligt (A.7.1) har vi

$$\left|\int_N^\infty\frac{\{x\}}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right|\leq\frac{1}{\sigma N^\sigma}=O(1).$$

Vi har också att $|s-1|\gg 1$ så $\frac{1}{|s-1|}\ll 1$ och därmed $\frac{1}{|s-1|^2}\ll 1$. Dessutom har vi $N^{1-\sigma}\leq 1$ ty $1-\sigma<0$, så $\frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|^2}\ll 1$. För den andra termen har vi på samma sätt $\frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|}\ll 1$.

Dessutom gäller att $\log N=\log(\lfloor|s|\rfloor+1)\leq\log(2+|s|)$, så vi har att

$$\frac{N^{1-\sigma}}{|s-1|}\log N\ll\log(2+|s|).$$

Vidare har vi att

$$|s|\left|\int_N^\infty\frac{\{x\}\log x}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right|\leq|s|\int_N^\infty\frac{\{x\}\log x}{x^{\sigma+1}}\mathrm{d}x\leq|s|\int_N^\infty\frac{\log x}{x^{\sigma+1}}\mathrm{d}x.$$

Med partiell integrering får vi

$$\begin{aligned}
\int_N^\infty\frac{\log x}{x^{\sigma+1}}\mathrm{d}x&=\left[-\frac{\log x}{\sigma x^\sigma}\right]_N^\infty-\int_N^\infty-\frac{1}{\sigma x^{\sigma+1}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{\log N}{\sigma N^\sigma}+\frac{1}{\sigma}\left[-\frac{1}{\sigma x^\sigma}\right]_N^\infty=\frac{\log N}{\sigma N^\sigma}+\frac{1}{\sigma^2 N^\sigma}.
\end{aligned}$$

Notera nu att $\lfloor|s|\rfloor+1\geq|s|$ så

$$\frac{|s|}{(\lfloor|s|\rfloor+1)^\sigma}\leq\frac{|s|}{\lfloor|s|\rfloor+1}\leq 1.$$

Så

$$|s|\left|\int_N^\infty \frac{\{x\}\log x}{x^{s+1}}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{|s|\log N}{\sigma N^\sigma} + \frac{|s|}{\sigma^2 N^\sigma} \leq \log N + 1 \ll \log(2+|s|).$$

Vi har alltså

$$|\zeta'(s)| \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^\sigma} + K_1 \log(2+|s|),$$

där K_1 är en positiv konstant. Med hjälp av proposition A.5.2 får vi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\log n}{n} = \frac{1}{2}\log^2 N + K_2 + O\left(\frac{\log N}{N}\right) \ll \log^2(2+|s|),$$

där K_2 är en positiv konstant. Slutligen har vi

$$|\zeta'(s)| \ll \log^2(2+|s|) + \log(2+|s|) \ll \log^2(2+|s|),$$

och vi är klara. □

A.8 Utelämnade bevis till den klassiska delen

Proposition A.8.1. (Poissons summationsformel) Låt $f(x)$ vara en styckvis monoton, kontinuerlig och reellvärd funktion. Då gäller

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$$

där $\hat{f}$ är Fouriertransformen.

Bevis. Satsen anses vara känd och lämnas därför åt läsaren att bevisa eller kolla upp i [2, s. 14-15]. □

Bevis av lemma 2.2.1. Låt $f(n) = e^{-\pi n^2}$. Från Fourieranalysen vet vi att $f = \hat{f}$. Vi ser att

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)$$

med $g(n) = f(\sqrt{x}n)$. Vidare är

$$\hat{g}(m) = \frac{1}{\sqrt{x}}\hat{f}(\frac{m}{\sqrt{x}}) = \frac{e^{-\pi m^2/x}}{\sqrt{x}}.$$

Poissons summationsformel ger nu att

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \hat{g}(m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{x}}\hat{f}\left(\frac{m}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{-m^2\pi/x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\theta(1/x)$$

och beviset är klart. □

Proposition A.8.2. (Jensens formel) Antag att $f(s)$ är holomorf i $|s| \leq R$. Antag vidare att $f(0) = 1$ och låt $n(r)$ vara antalet nollställen till f i $|s| \leq r$. Då gäller

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}dr = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(re^{i\theta})|d\theta - |\log f(0)|.$$

Bevis. Se [12, s. 340]. □

Bevis av sats 2.2.9. Vi börjar med att visa de två senare påståendena, för att slutligen landa i produktformeln för $\xi(s)$. Jensens formel, proposition A.8.2, ger:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\xi(Re^{i\theta})|d\theta - |\log\xi(0)| = \int_0^R \frac{n(r)}{r}dr.$$

Vi anmärker att $|\log\xi(0)|$ är begränsad, ty $\xi(0) \neq 0$, vilket inses genom funktionalekvationen och att ζ har en pol i 1. Enligt proposition 2.2.1 ovan har vi att för något C så är $|\xi(s)| < e^{C|s|\log|s|}$, så $\log|\xi(Re^{i\theta})| < CR\log R$ vilket ger att

$$\int_0^R \frac{n(r)}{r}dr \leq CR\log R.$$

Vi vill uppskatta $n(R)$ och detta kan vi göra genom att uppskatta skillnaden i antalet nollställen med det i en större cirkel:

$$\int_R^{2R}\frac{n(r)}{r}dr \geq n(R)\int_R^{2R}\frac{dr}{r} = n(R)\log 2.$$

Vänsterledet är begränsat av $CR\log R$, där C inte nödvändigtvis är samma som tidigare. Således är $n(R) = O(R\log R) = O(R^{1+\epsilon})$ för varje $\epsilon > 0$. Låt nu $\alpha > 1+\epsilon$. Då gäller att

$$\sum_n |\rho_n|^{-\alpha} = \int_0^\infty r^{-\alpha}dn(r) = \alpha\int_0^\infty r^{-\alpha-1}n(r)dr$$

konvergerar. Den andra likheten följer från (A.1.2). Analogt får vi att $\sum\limits_n |\rho_n|^{-\alpha}$ divergerar om $\alpha \leq 1$. Detta bevisar andra delen av satsen.

Vi ska nu bevisa att $\xi(s)$ uppfyller (2.2.9). Vi börjar med att notera att produkten

$$P(s) = \prod_n \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right)e^{s/\rho_n}$$

har nollställen precis i $\{\rho_n\}$. Dessutom är den absolutkonvergent för alla s, vilket inses genom att logaritmera produkten och Taylorutveckla $\log(1-\frac{s}{\rho_n})$,

$$\begin{aligned}\log|P(s)| &= \sum_n \log\left|(1-\frac{s}{\rho_n})e^{s/\rho_n}\right| \\ &\leq \sum_n \log|1-\frac{s}{\rho_n}| + \left|\frac{s}{\rho_n}\right| \\ &= \frac{1}{2}\sum_n\left|\frac{s}{\rho_n}\right|^2 + O\left(\left|\frac{s}{\rho_n}\right|^3\right) < \infty.\end{aligned}$$

Vi sätter nu

$$\xi(s) = P(s)F(s)$$

där $F(s)$ nu är analytisk och saknar nollställen, och alltså på formen $e^{g(s)}$, för någon funktion g. För att kunna dra slutsatsen att $g(s) = A + Bs$ kan vi exempelvis hitta en undre begränsning för $P(s)$ då få en övre begränsning för $F(s)$. Vi gör uppskattningen av $P(s)$ på en cirkel med radie R, och skriver $P(s) = P_1(s)P_2(s)P_3(s)$ där nollställena till P_1, P_2, P_3 ligger i områdena $|\rho_n| < \frac{1}{2}R$, $\frac{1}{2}R \leq |\rho_n| \leq 2R$, och $|\rho_n| > 2R$ respektive. Vi låter också r_n beteckna $|\rho_n|$. Vi behöver ge ett argument för att vi kan hitta en radie så att $r_n \neq R$ för alla n för att slippa riskera att hitta en övre begränsning för 0. Betrakta intervallen $(r_n - r_n^{-2}, r_n + r_n^{-2})$. Den totala längden av dessa är $2\sum\limits_n r_n^{-2} < \infty$, så vi kan hitta godtyckligt stora R som uppfyller $|R - r_n| > r_n^{-2}$.

P_1: Faktorerna kan uppskattas enligt följande

$$|(1-\frac{s}{\rho_n})e^{s/\rho_n}| \geq \left(\frac{R}{r_n}-1\right)e^{-|s|/r_n} > e^{-R/r_n}$$

Dessutom har vi att

$$\sum_{n<\frac{1}{2}R} r_n^{-1} = \sum_{n<\frac{1}{2}R} r_n^{-1-\epsilon} r_n^{\epsilon} < \left(\frac{1}{2}R\right)^{\epsilon} \sum_{n<\frac{1}{2}R} r_n^{-1-\epsilon} < \left(\frac{1}{2}R\right)^{\epsilon} \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{-1-\epsilon} < R^{2\epsilon}$$

Så

$$\prod_{r_n<\frac{1}{2}R} e^{-R/r_n} = e^{-R\sum r_n^{-1}} > e^{-R^{1+2\epsilon}}$$

Alltså är $P_1(s) > e^{-R^{1+2\epsilon}}$

P_2: Av valet av R har vi att

$$|(1-\frac{s}{\rho_n})e^{s/\rho_n}| > \frac{|\rho_n - s|}{2R}e^{-2} \geq \frac{|R-r_n|}{2R}e^{-2} > CR^{-3}$$

för någon positiv konstant C. Antalet nollställen är $O(R\log R) = O(R^{1+\epsilon})$ så vi har att

$$|P_2(s)| > (CR^{-3})^{R^{1+\epsilon}} > e^{-R^{1+2\epsilon}}$$

om vi låter $R^{\epsilon} > 3\log R$.

P_3: Vi skriver om uttrycket på exponentialform och Taylorutvecklar,

$$\left|(1-\frac{s}{\rho_n})e^{s/\rho_n}\right| = \left|e^{\log(1-s/\rho_n)+s/\rho_n}\right| > e^{-c(R/r_n)^2}$$

för något positivt c. Hela produkten $P_3(s)$ blir då större än $e^{-R^{1+2\epsilon}}$, ty

$$\sum_{r_n>2R} r_n^{-2} = \sum_{r_n>2R} r_n^{-1+\epsilon} r_n^{-1-\epsilon} < (2R)^{-1+\epsilon} \sum_{1}^{\infty} r_n^{-1-\epsilon} < R^{-1+2\epsilon}$$

för något val av ϵ.

Slutligen får vi alltså att $P(s) > e^{-R^{1+3\epsilon}}$ och därav följer det att $F(s) < e^{R^{1+4\epsilon}}$ och det finns då endast möjligheten att $F(s) = e^{g(s)}$ där $g(s)$ är ett polynom av första graden, varav satsen följer. □

Bevis av sats 2.3.1. Vi börjar med fallet $0 < y < 1$. Då $\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{y^s}{s} = 0$ likformigt med avseende på t kan vi skriva

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{\infty-iT} y^s \frac{ds}{s} - \frac{1}{2\pi i}\int_{c+iT}^{\infty+iT} y^s \frac{ds}{s}.$$

Den första termen i högerledet kan uppskattas enligt följande:

$$\left|\int_{c-iT}^{\infty-iT} y^s \frac{ds}{s}\right| \leq \int_{c-iT}^{\infty-iT} \left|\frac{y^s}{s}\right| ds \leq \frac{1}{T}\int_{c}^{\infty} y^{\sigma} d\sigma = \frac{y^c}{T|\log y|}.$$

Första olikheten är bara triangelolikheten för integraler, den andra gäller då $|s| > T$, och likheten följer direkt från omskrivningen $y^c = e^{c \log y}$. Analogt följer samma sak för den andra termen och vi erhåller alltså den andra olikheten. Den första olikheten får vi genom att ersätta linjestycket mellan $c - iT$ och $c + iT$ med cirkelbågen med centrum i origo och radie $R = \sqrt{c^2 + T^2}$ mellan punkterna $c - iT$ och $c + iT$. På cirkelbågen $|s| = R$ gäller alltså att $|y^s| \leq y^c$. Så för beloppet av integralen har vi

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \pi R \frac{y^c}{R} < y^c$$

och vi är således klara med fallet $0 < y < 1$. För $y > 1$ betraktar vi rektangeln R med hörn i $c \pm iT$ och $r \pm iT$ där $r < -1$. Integranden är meromorf i R med en enkel pol i 0 så enligt Cauchys residysats är

$$\int_R y^s \frac{ds}{s} = \operatorname{Res}\left(\frac{y^s}{s}, 0 \right) = 1$$

vilket ger oss att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s} = 1 - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{r+iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{r+iT}^{r-iT} y^s \frac{ds}{s} + \frac{1}{2\pi i} \int_{r-iT}^{c-iT} y^s \frac{ds}{s} \right)$$

på det vertikala linjestycket med realdel r observerar vi att

$$\left| \frac{y^s}{s} \right| = \frac{y^\sigma}{|s|} \leq \frac{y^\sigma}{|\sigma|} \leq \frac{1}{|\sigma|}.$$

Låter vi nu $r \to -\infty$ så går integralen mot 0. För de andra två integralerna i högerledet kan vi göra en liknande uppskattning som i fallet $y < 1$.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c+iT}^{-\infty+iT} y^s \frac{ds}{s} \right| < \frac{1}{2\pi T} \int_c^{-\infty} y^\sigma \, d\sigma < \frac{y^c}{T \log y}.$$

En övre begränsning för den andra integralen följer helt analogt, och vi erhåller vad vi ville. För den andra uppskattningen betraktar vi igen cirkeln C och cirkelbågen C_1 mellan $c + iT$ och $c - iT$ med centrum origo och radie $R = \sqrt{c^2 + T^2}$. Integralen runt cirkeln är enligt Cauchys residysats igen 1, och tar vi bort bidraget från C_1 har vi att

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s} = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} y^s \frac{ds}{s}.$$

Nu gäller det att $\left| \frac{y^s}{s} \right| \leq \frac{y^\sigma}{R} \leq \frac{y^c}{R}$ och således är

$$\int_{C_1} y^s \frac{ds}{s} \leq \frac{y^c}{R} \pi R = O(y^c).$$

Det enda fallet som återstår är nu $y = 1$. Om vi låter $s = c + it$ har vi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} y^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{dt}{c + it} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{1}{c + it} + \frac{1}{c - it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{2c}{c^2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Den sista integralen känner vi igen om $\arctan(t/c)$ så integralen över $\mathbb{R}_{\geq 0}$ är $\frac{1}{2}$. Det återstår då bara att uppskatta skillnaden mellan integralen över vårt område och över alla icke-negativa tal, och vi börjar med att göra variabelbytet $x = \frac{t}{c}$. Då får vi

$$\frac{1}{\pi} \int_{T/c}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx < \frac{c}{T}$$

vilket bevisar påståendet och satsen är då klar. □

A.9 Pretentiösa lemman

Bevis av 3.2.1. Vi har att

$$\sum_p \frac{a_p}{p^\alpha} = \sum_{p\le x} \frac{a_p}{p^\alpha} + \sum_{p>x} \frac{a_p}{p^\alpha} = \sum_{p\le x} \frac{a_p}{p^\alpha} + O(1),$$

ty $\sum_{p>x} \frac{a_p}{p^\alpha}$ konvergerar enligt jämförelse med $\zeta(s)$ för $\mathrm{Re}(s) > 1$. Vi får nu

$$\begin{aligned}\sum_{p\le x} \frac{a_p}{p^\alpha} + O(1) &= \sum_{p\le x} \frac{a_p}{p} + \left(\sum_{p\le x} \frac{a_p}{p^\alpha} - \sum_{p\le x} \frac{a_p}{p}\right) + O(1) \\ &= \sum_{p\le x} \frac{a_p}{p} - \left(\sum_{p\le x} \frac{a_p}{p}(1 - p^{-\frac{1}{\log x}})\right) + O(1).\end{aligned}$$

Notera nu att

$$\begin{aligned}1 - p^{-\frac{1}{\log x}} = 1 - e^{-\frac{\log p}{\log x}} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\log p}{\log x}\right)^k}{k!} &= \frac{\log p}{\log x} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\log p}{\log x}\right)^k}{k!} \\ = \frac{\log p}{\log x} - \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^3}{3!} - \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^4}{4!} + \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^5}{5!} - \dots \\ \le \frac{\log p}{\log x} - \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^2}{3!} + \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^3}{3!} - \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^4}{5!} + \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^5}{5!} - \dots \\ = \frac{\log p}{\log x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^{2k+1} - \left(\frac{\log p}{\log x}\right)^{2k}}{(2k+1)!} \le \frac{\log p}{\log x},\end{aligned}$$

ty $0 < \frac{\log p}{\log x} \le 1$ och därmed gäller att $\left(\frac{\log p}{\log x}\right)^{2k+1} \le \left(\frac{\log p}{\log x}\right)^{2k}$. Vi får nu att

$$\sum_{p\le x} \frac{a_p}{p}(1 - p^{-\frac{1}{\log x}}) \ll \sum_{p\le x} \frac{\frac{\log p}{\log x}}{p} = \frac{1}{\log x} \sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} \ll \frac{1}{\log x} \log x = 1,$$

där vi i det sista steget använder proposition A.5.4. Slutligen har vi alltså

$$\sum_{p\le x} \frac{a_p}{p} = \sum_p \frac{a_p}{p^\alpha} + O(1).$$

□

A.10 Asymptotisk begränsning av $\psi(x) - x$ från asymptotisk begränsning av $M(x)$

Bevis av lemma 3.5.1. Vi har enligt 3.1.2.iii att

$$\Lambda(n) = \sum_{ab=n} \mu(a) \log b,$$

och att

$$1 = \sum_{ab=n} \mu(a)\tau(b),$$

Så

$$\begin{aligned}
\psi(x) - x = \sum_{n\le x}(\Lambda(n)-1) &= \sum_{n\le x}\left(\sum_{ab=n}\mu(a)\log b - \sum_{ab=n}\mu(a)\tau(b)\right)\\
&= \sum_{ab\le x}\mu(a)(\log b - \tau(b))\\
&= \sum_{ab\le x}\mu(a)(\log b - \tau(b)) + 2\gamma\sum_{n\le x}\sum_{ab=n}\mu(a) - 2\gamma\\
&= \sum_{ab\le x}\mu(a)(\log b - \tau(b) + 2\gamma) - 2\gamma.
\end{aligned}$$

Vi delar nu upp summan i två bitar. En med $b \le B$ och en med $b > B$ där B är godtyckligt vald. Notera nu att

$$\begin{cases} ab \le x \\ b > B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \le \frac{x}{b} \\ \frac{1}{b} < \frac{1}{B} \end{cases} \Rightarrow a \le \frac{x}{B}.$$

Så summan med $b > B$ övergår till

$$\sum_{a\le \frac{x}{B}}\mu(a)\sum_{b\le\frac{x}{a}}(\log b + 2\gamma - \tau(b)) \ll \sum_{a\le\frac{x}{B}}\mu(a)\sqrt{\frac{x}{a}},$$

ty

$$\sum_{n\le x}(\log n - \tau(n) + 2\gamma) = O(\sqrt{x}),$$

enligt proposition A.5.5. Vi får nu att

$$\left|\sum_{a\le\frac{x}{B}}\mu(a)\sqrt{\frac{x}{a}}\right| \le \sum_{a\le\frac{x}{B}}|\mu(a)|\sqrt{\frac{x}{a}} \le \sum_{a\le\frac{x}{B}}\sqrt{\frac{x}{a}},$$

med partiell summation (A.1.1) får vi med $y = \frac{x}{B}$

$$\begin{aligned}
\sum_{a\le\frac{x}{B}}\sqrt{\frac{x}{a}} = \sqrt{x}\sum_{a\le y}\frac{1}{\sqrt{a}} &= \sqrt{x}\left(\left(\sum_{a\le y}1\right)\frac{1}{\sqrt{y}} - \int_1^y\left(\sum_{a\le t}1\right)\frac{-1}{2}\frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t\right)\\
&= \sqrt{x}\left(\left\lfloor\frac{x}{B}\right\rfloor\frac{1}{\sqrt{x/B}} + \int_1^y\lfloor t\rfloor\frac{1}{2}\frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t\right)\\
&\le \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x}{B}} + \frac{1}{2}\int_1^{x/B}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right)\\
&= \sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{x}{B}} + \sqrt{\frac{x}{B}} - 1\right) = \frac{2x}{\sqrt{B}} - \sqrt{x} \le \frac{2x}{\sqrt{B}} \ll \frac{x}{\sqrt{B}}.
\end{aligned}$$

Summan med $b \le B$ övergår i sin tur till

$$\begin{aligned}
&\sum_{b\le B}\sum_{a\le\frac{x}{b}}\mu(a)(\log b + 2\gamma - \tau(b))\\
&= \sum_{b\le B}(\log b - \tau(b) + 2\gamma)\sum_{a\le\frac{x}{b}}\mu(a)\\
&= \sum_{b\le B}(\log b - \tau(b) + 2\gamma)M\left(\frac{x}{b}\right).
\end{aligned}$$

Så

$$\begin{aligned}
&\sum_{ab\leq x}\mu(a)(\log b-\tau(b)+2\gamma)-2\gamma\\
&=\sum_{b\leq B}(\log b-\tau(b)+2\gamma)M\left(\frac{x}{b}\right)+\sum_{a\leq\frac{x}{B}}\mu(a)\sum_{b\leq\frac{x}{a}}(\log b-\tau(b)+2\gamma)-2\gamma\\
&=\sum_{b\leq B}(\log b-\tau(b)+2\gamma)M\left(\frac{x}{b}\right)+O\left(\frac{x}{\sqrt{B}}\right)-2\gamma.
\end{aligned}$$

Vi har alltså att

$$\psi(x)-x=\sum_{b\leq B}(\log b-\tau(b)+2\gamma)M\left(\frac{x}{b}\right)+O\left(\frac{x}{\sqrt{B}}\right).$$

Vi ser att $O(\frac{x}{\sqrt{B}})$ inte får dominera över summan. Om vi antar att

$$\sum_{b\leq B}(\log b-\tau(b)+2\gamma)M\left(\frac{x}{b}\right)\ll\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15},$$

måste vi ha att

$$\frac{x}{\sqrt{B}}\leq\frac{Kx}{\log x}(\log\log x)^{15},$$

vilket är ekvivalent med

$$\sqrt{B}\geq K\frac{\log x}{(\log\log x)^{15}},$$

det vill säga

$$B\geq K^2\frac{\log^2 x}{(\log\log x)^{30}},$$

där K är en positiv konstant. Det räcker alltså med $B=\log^2 x$.

Vidare har vi enligt antagandet

$$\psi(x)-x\ll x\sum_{b\leq B}(\log b+\tau(b)+2\gamma)\frac{1}{b(\log(x/b))}(\log\log(x/b))^{13}+\frac{x}{\sqrt{B}}.$$

Vi har nu att

$$\log(x/b)=\log x-\log b\geq\log x-\log B=\log x-2\log\log x,$$

ty $b\leq B$ och därmed $-\log b\geq-\log B$. Vi har också att

$$\log(x/b)=\log x-\log b\leq\log x.$$

Det gäller alltså

$$\begin{aligned}
\psi(x)-x&\ll\frac{x(\log\log x)^{13}}{\log x-2\log\log x}\sum_{b\leq B}\frac{\log b+\tau(b)+2\gamma}{b}+\frac{x}{\sqrt{B}}\\
&\ll\frac{x(\log\log x)^{13}}{\log x}\left(\sum_{b\leq B}\frac{\log b}{b}+\sum_{b\leq B}\frac{\tau(b)}{b}\right)+\frac{x}{\sqrt{B}}\\
&\ll\frac{x(\log\log x)^{13}}{\log x}\left(\frac{1}{2}\log^2 B+K+\frac{\log B}{B}+(\log\log x)^2\right)+\frac{x}{\sqrt{B}}\\
&\ll\frac{x(\log\log x)^{13}}{\log x}4(\log\log x)^2+\frac{x}{\log x}\ll\frac{x}{\log x}(\log\log x)^{15},
\end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}\sum_{b\le B}\frac{\tau(b)}{b} &= 1+\sum_{2\le b\le B}\frac{\tau(b)}{b}\\ &= 1+\left(\sum_{2\le b\le B}\tau(b)\right)\frac{1}{B}+\int_2^B\left(\sum_{2\le b\le B}\tau(b)\right)\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t\\ &\ll 1+\log B+\int_2^B\frac{\log t}{t}\mathrm{d}t \ll \log\log x+\frac{1}{2}\left[\log^2 t\right]_2^B\\ &\ll \log\log x+(\log\log x)^2 \ll (\log\log x)^2,\end{aligned}$$

och enligt proposition A.5.2

$$\sum_{b\le B}\frac{\log b}{b}=\frac{1}{2}\log^2 B+K+O\left(\frac{\log B}{B}\right).$$

Slutligen gäller att

$$\frac{1}{\log x-2\log\log x}\ll\frac{1}{\log x},$$

ty detta är ekvivalent med

$$K\ge\frac{\log x}{\log x-2\log\log x},$$

för en positiv konstant K och för alla $x\ge 3$. Detta är i sin tur ekvivalent med

$$K\ge\max_{x\in[3,\infty)}\frac{\log x}{\log x-2\log\log x}=\frac{e}{e-2},$$

och om $K\ge\frac{e}{e-2}$ har vi alltså påståendet. $\square$

Litteraturförteckning

[1] Apostol, Tom M.; *Introduction to analytic number theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1976. xii+338 sidor.

[2] Davenport, Harold. *Multiplicative Number Theory.* New York: Springer-Verlag, 1980. E-bok.

[3] de la Vallée Poussin, Charles, *Recherches analytiques de la théorie des nombres premiers*, Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles vol. 20 B, 1896, pp. 183–256, 281–352, 363–397, https://ia802708.us.archive.org/17/items/recherchesanaly00pousgoog/recherchesanaly00pousgoog.pdf

[4] de la Vallée Poussin, Charles, *Sur la fonction Zeta de Riemann et le nombre des nombres premiers inferieur a une limite donnée*, Mémoires couronnés de l Academie de Belgique, vol.59, 1899, pp. 1–74, https://archive.org/details/surlafonctionze00pousgoog

[5] Euler, Leonhard, *Variae observationes circa series infinitas*, Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 9, 1744, pp. 160-188, http://eulerarchive.maa.org/pages/E072.html

[6] Gauss, Carl-Friedrich, *Werke*, Bd 2, 1st ed, Göttingen 1863. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PID=PPN23599524X%7CLOG_0067

[7] Granville, Andrew; Soundarajan, Kannan; *Multiplicative number theory: The pretentious approach.* 2014. Opublicerat manuskript. http://www.dms.umontreal.ca/~andrew/PDF/BookChaps1n2.pdf

[8] Hadamard, Jacques, *Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, Vol. 24, 1896, pp. 199–220, http://archive.numdam.org/ARCHIVE/BSMF/BSMF_1896__24_/BSMF_1896__24__199_1/BSMF_1896__24__199_1.pdf

[9] Heath, Thomas L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, http://data.perseus.org/citations/urn:cts:greekLit:tlg1799.tlg001.perseus-eng1:9.prop.20

[10] Korobov, Nikolai M., *Estimates of trigonometric sums and their applications*, Uspekhi Mat. Nauk, 13:4(82) (1958), 185–192, http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7458&option_lang=eng

[11] Koukoulopoulos, Dimitris; *Pretentious multiplicative functions and the prime number theorem for arithmetic progressions.* Compositio Math. 149 (2013) 1129–49, doi:10.1112/S0010437X12000802

[12] Lang, Serge, *Complex analysis.* Fjärde upplagan. Graduate Texts in Mathematics, 103. Springer-Verlag, New York, 1999. xiv+485 sidor, ISBN: 0-387-98592-1

[13] Legendre, Adrien-Marie, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris: Duprat, 1808, https://archive.org/details/essaisurlathor00lege

[14] Rainville, Earl. D. *Special Functions*. New York: The Macmillian Company, 1960

[15] Riemann, Bernhard, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse*, Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, http://www.claymath.org/sites/default/files/riemann1859.pdf

[16] Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis.* 3rd international edition McGraw-Hill Higher Education, 1976

[17] Vinogradov, Ivan M., *A new estimate of the function* $\zeta(1+it)$, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 22:2 (1958), 161–164, http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=3962&option_lang=eng

[18] Von Koch, Helge, *Sur la distribution des nombres premiers*, Acta Mathematica, December 1901, 24:159, http://www.mathunion.org/ICM/ICM1900/Main/icm1900.0195.0198.ocr.pdf