Uppgift: Låt A, B och C var mängder i ett givet universum U. Visa att

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

Lösning: Kom ihåg att likhet $X = Y$ mellan två mängder X och Y i U enligt definitionen betyder att

$$\forall x \in U : (x \in X \iff x \in Y).$$

Så vi måste visa att

$$\forall x \in U : x \in (A \cup B) \cap C \implies x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

och

$$\forall x \in U : x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap C.$$

Vi börjar med den första implikationen. Antag att $x \in (A \cup B) \cap C$, vi måste visa att $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. $x \in (A \cup B) \cap C$ betyder att $x \in C$ och att $x \in A$ eller $x \in B$. Om $x \in A$ får vi att $x \in A \cap C$, medans om $x \in B$ får vi att $x \in B \cap C$. I vilket fall har vi bevisat att $x \in A \cap C$ eller $x \in B \cap C$, det vill säga att

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

som önskat. Det ger den första implikationen.

Vi visar nu den andra implikationen. Antag att $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Observera först att eftersom $A \subseteq A \cup B$ gäller

$$A \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

På samma sätt gäller

$$B \cap C \subseteq (A \cup B) \cap C.$$

Så om $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ så är antingen $x \in A \cap C$ eller $x \in B \cap C$, och bägge dessa mängder är delmängder till $(A \cup B) \cap C$. Alltså har vi att $x \in (A \cup B) \cap C$, vilket var det vi ville visa.

Vi har nu visat bägge implikationerna, vilket avslutar beviset.