UNIVERSITÉ DE GENÈVE FACULTÉ DES SCIENCES

Section de Mathématiques Professeur E. Hairer

DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA SOLUTION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE À GRANDES OSCILLATIONS

Travail de diplôme présenté à la Faculté des Sciences de l'Université de Genève

par

David Cohen

Genève, mai 2000

Table des matières

1 Introduction

Considérons l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = g(x) \text{ avec } \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega I \end{pmatrix}, \ \omega \gg 1 \ ,$$

g non-linéaire et analytique .
Nous aimerions montrer que la solution de ce problème peut-être écrite (formellement) sous la forme

$$x(t) = y(t) + \sum_{k \neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t),$$

avec $y(t)$ et $z^k(t)$ des fonctions lisses (i.e. toutes leurs dérivées sont bornées indépendamment de ω).
Essayons d'expliquer la forme de la solution $x(t) = y(t) + \sum_{k \neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)$:

1) Tout d'abord pour une équation différentielle $\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = g(t)$.
   Une solution particulière est donnée par

$$x(t) = c_0(t) + \omega^{-1} c_1(t) + \omega^{-2} c_2(t) + \omega^{-3} c_3(t) + \omega^{-4} c_4(t) + ...$$

   avec les coefficients c_i à déterminer :
   $\ddot{c}_0(t) + \omega^{-1}\ddot{c}_1(t) + \omega^{-2}\ddot{c}_2(t) + \omega^{-3}\ddot{c}_3(t) + \omega^{-4}\ddot{c}_4(t) + ... + \omega^2 c_0(t) + \omega c_1(t) + c_2(t) + \omega^{-1} c_3(t) + \omega^{-2} c_4(t) + ... = g(t)$
   Donc $c_0(t) = 0$, $c_1(t) = 0$, $c_2(t) = g(t)$, $c_3(t) = 0$, $c_4(t) = -\ddot{c}_2 = -\ddot{g}(t)$,...
   D'où la solution générale

$$x(t) = \omega^{-2} g(t) - \omega^{-4} \ddot{g}(t) + ... + d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t}$$

   qui est bien de la forme désirée ($y(t) = \omega^{-2} g(t) - \omega^{-4}\ddot{g}(t) + ...$ et d_1,d_2 fonctions constantes).
2) Introduisons maintenant une non linéarité à droite de l'égalité : $\ddot{x} + \omega^2 x = x^2 + g(t)$.
   Pour résoudre ce problème nous allons utiliser l'itération du point fixe :
   $x_0 = 0$ d'où $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = x_0^2 + g(t) = g(t)$ donc par le calcul précédent $x_1(t) = y(t) + d_1 e^{i\omega t} + d_2 e^{-i\omega t}$.
   $\ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = x_1^2 + g(t) = y^2 + d_1^2 e^{2i\omega t} + d_2^2 e^{-2i\omega t} + ... + g(t)$ que nous résolvons comme avant et nous constatons que la solution de l'équation différentielle est bien du type voulu.

Pour parvenir à une solution de $\ddot{x} + \Omega^2 x = g(x)$ nous allons tout d'abord introduire la notion d'arbre (paragraphes 2 et 3, désolé pour les longs calculs...). Puis nous verrons quelques lemmes au paragraphe 4 qui nous servirons à exprimer la solution sous la forme voulue. Malheureusement cette série ne converge pas et il nous faudra la tronquer. Par chance (!), l'erreur ainsi faite est exponentiellement petite.

Ce résultat est utile pour montrer la conservation de l'énergie (et de l'énergie oscillatoire) sur de longs intervalles (cf. [1]).

Pour plus d'informations sur l'équation différentielle (et le problème de Fermi-Pasta-Ulam), nous renvoyons le lecteur à [1].

2 Motivations pour l'utilisation des arbres

Comme son nom l'indique, ce paragraphe n'est "qu'une" motivation pour l'emploi des arbres . Il comporte beaucoup de calculs qui sont néanmoins nécessaire à la compréhension du prochain paragraphe.
Pour résoudre le problème

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = g(x) \quad \text{où} \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega I \end{pmatrix} \text{ avec } \omega \gg 1, \tag{1}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = g_1(x_1,x_2) \\ \ddot{x}_2 + \omega^2 x_2 = g_2(x_1,x_2), \end{cases} \tag{2}$$

on écrit la solution sous la forme $x(t) = y(t) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)$ où $y = (y_1,y_2)$ est une fonction réel et $z^k = (z_1^k,z_2^k)$ sont des fonctions complexes (on a $z^{-k} = \bar{z^k}, z_1 = z_1^1, z_2 = z_2^1$) qu'on insère dans (2) et qui donne, grâce à Taylor:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big)^{(2)} =& g_1(y_1,y_2) + g_1'(y_1,y_2)\Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big) + \\ & \frac{1}{2} g_1''(y_1,y_2)\Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t), \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big) + ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_2 + \Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big)^{(2)} + \omega^2 y_2 + \omega^2 \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t) =& g_2(y_1,y_2) + g_2'(y_1,y_2)\Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big) + \\ & \frac{1}{2} g_2''(y_1,y_2)\Big(\sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t), \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)\Big) + ... \end{aligned}$$

Puis on compare les coefficients de $e^{ik\omega t}$, ce qui nous donne, avec les notations $g_i^{(m)}(y)z^\alpha = g_i^{(m)}(y)(z^{\alpha_1},...,z^{\alpha_m})$ pour un multi-indice $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_m)$, où $\alpha_i \neq 0$ entier et $s(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i$:

$$\begin{aligned} k = 0 : &\quad \ddot{y}_1 = g_1(y_1,y_2) + \sum_{s(\alpha)=0, m\geq 1} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y) z^\alpha \\ k = 1 : &\quad -\omega^2 z_1 + 2i\omega \dot{z}_1 + \ddot{z}_1 = \sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y) z^\alpha \\ k = 2 : &\quad -2^2\omega^2 z_1^2 + 2\cdot 2i\omega \dot{z}_1^2 + \ddot{z}_1^2 = \sum_{s(\alpha)=2} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y) z^\alpha \end{aligned}$$

Ainsi que (pour la deuxième coordonnée):

$$\begin{aligned} k = 0 : &\quad \ddot{y}_2 + \omega^2 y_2 = g_2(y_1,y_2) + \sum_{s(\alpha)=0, m\geq 1} \frac{1}{m!} g_2^{(m)}(y) z^\alpha \\ k = 1 : &\quad 2i\omega \dot{z}_2 + \ddot{z}_2 = \sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_2^{(m)}(y) z^\alpha \\ k = 2 : &\quad -2^2\omega^2 z_2^2 + 2\cdot 2i\omega \dot{z}_2^2 + \ddot{z}_2^2 + \omega^2 z_2^2 = \sum_{s(\alpha)=2} \frac{1}{m!} g_2^{(m)}(y) z^\alpha \end{aligned}$$

On obtient ainsi le système d'équations différentielles suivant:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \omega^2 y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} &= g(y) + \sum_{s(\alpha)=0, m\geq 1} \frac{1}{m!} g^{(m)}(y) z^\alpha \\
\begin{pmatrix} -\omega^2 z_1 \\ 2i\omega \dot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2i\omega \dot{z}_1 + \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} &= \sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g^{(m)}(y) z^\alpha \\
\begin{pmatrix} -k^2\omega^2 z_1^k \\ (1-k^2)\omega^2 z_2^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2ki\omega \dot{z}_1^k + \ddot{z}_1^k \\ 2ki\omega \dot{z}_2^k + \ddot{z}_2^k \end{pmatrix} &= \sum_{s(\alpha)=k} \frac{1}{m!} g^{(m)}(y) z^\alpha \quad \text{pour } k \geq 2
\end{aligned} \tag{3}$$

Où, pour ω grand, les termes dominants sont dans la partie la plus à gauche de l'expression.
Pour qu'une solution de ce système soit sans oscillations (i.e. avec des dérivées bornées indépendamment de ω) , on observe que $y_2 = \mathcal{O}(\omega^{-2})$. On peut donc développer les termes non linéaires en série de Taylor autour de $(y_1{,}0)$.

a) En considérant des termes jusqu'à $\mathcal{O}(\omega^{-2})$, on obtient :

- $y_2 = \mathcal{O}(\omega^{-2})$
- $z_1 = -\frac{2i}{\omega}\dot{z}_1 + \mathcal{O}(\omega^{-2})$ on dérive cette équation, puis on insère $\dot{z}_1 = -\frac{2i}{\omega}\ddot{z}_1 + \mathcal{O}(\omega^{-2})$ dans la formule pour z_1 et on obtient $z_1 = \mathcal{O}(\omega^{-2})$
- $z_1^k = \mathcal{O}(\omega^{-2})$ et $z_2^k = \mathcal{O}(\omega^{-2})$ où $k \geq 2$
- $\ddot{y}_1 = g_1(y_1{,}y_2) + \sum_{s(\alpha)=0} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y_1{,}y_2) z^\alpha =$
  $g_1(y_1{,}0) + \sum_{s(\alpha)=0, \alpha_i \in \{\pm 1\}} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1{,}0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-2})$
  (*toujours à l'aide de Taylor et où* z^α *ne contient que* $z_2^{\pm 1}$)
- Pour $\dot{z}_2$:
  $$2i\dot{z}_2 = \frac{1}{\omega}(-\ddot{z}_2) + \frac{1}{\omega} \sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_2^{(m)}(y_1{,}0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-2}) \tag{4}$$
  On dérive (afin d'éliminer la dérivée d'ordre 2) :
  $$2i\ddot{z}_2 = \frac{1}{\omega}(-\dddot{z}_2) + \frac{1}{\omega}\Big(\sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_2^{(m)}(y_1{,}0) z^\alpha \Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-2})$$
  qu'on insère dans (4) ce qui nous donne:
  $$\dot{z}_2 = \frac{1}{2i\omega} \sum_{s(\alpha)=1, \alpha_i \in \{\pm 1\}} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1{,}0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-2})$$
  (*où* z^α *ne contient que* $z_2^{\pm 1}$)

b) Essayons jusqu'à $\mathcal{O}(\omega^{-3})$:

- $$z_1 = \frac{2i}{\omega}\dot{z}_1 + \frac{1}{\omega^2}\ddot{z}_1 - \frac{1}{\omega^2} \sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y_1{,}0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \tag{5}$$

qu'on dérive deux fois *(pour éliminer les termes* $\dot{z}_1$ *et* $\ddot{z}_1$*) :*

$$\dot{z}_1 = \frac{2i}{\omega}\ddot{z}_1 + \frac{1}{\omega^2}\dddot{z}_1 - \frac{1}{\omega^2}\Big(\sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y_1{,}0) z^\alpha \Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{2i}{\omega}\dddot{z}_1 + \frac{1}{\omega^2}\ddddot{z}_1 - \frac{1}{\omega^2}\Big(\sum_{s(\alpha)=1} \frac{1}{m!} g_1^{(m)}(y_1{,}0) z^\alpha \Big)^{(2)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

Puis qu'on insère dans (5) :

$$z_1 = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{s(\alpha)=1,\alpha_i\in\{\pm1\}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1,0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

(de nouveau z^α ne contient que $z_2^{\pm1}$)

- $$z_1^k = \frac{2i}{k\omega}\dot{z}_1^k + \frac{1}{k^2\omega^2}\ddot{z}_1^k - \frac{1}{k^2\omega^2}\sum_{s(\alpha)=k}\frac{1}{m!}g_1^{(m)}(y_1,0)z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \qquad (6)$$

qu'on dérive deux fois:

$$\dot{z}_1^k = \frac{2i}{k\omega}\ddot{z}_1^k + \frac{1}{k^2\omega^2}\dddot{z}_1^k - \frac{1}{k^2\omega^2}\Big(\sum_{s(\alpha)=k}\frac{1}{m!}g_1^{(m)}(y_1,0)z^\alpha\Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

$$\ddot{z}_1^k = \frac{1}{\omega}(....) + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

Puis qu'on insère dans (6) :

$$z_1^k = -\frac{1}{k^2\omega^2} \sum_{s(\alpha)=k,\alpha_i\in\{\pm1\}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1,0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \qquad (7)$$

(comme avant z^α ne contient que $z_2^{\pm1}$)

- $$z_2^k = \frac{-2ki}{(1-k^2)\omega}\dot{z}_2^k - \frac{1}{(1-k^2)\omega^2}\ddot{z}_2^k + \frac{1}{(1-k^2)\omega^2}\sum_{s(\alpha)=k}\frac{1}{m!}g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \qquad (8)$$

qu'on dérive deux fois:

$$\dot{z}_2^k = \frac{-2ki}{(1-k^2)\omega}\ddot{z}_2^k - \frac{1}{(1-k^2)\omega^2}\dddot{z}_2^k + \frac{1}{(1-k^2)\omega^2}\Big(\sum_{s(\alpha)=k}\frac{1}{m!}g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha\Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

$$\ddot{z}_2^k = \frac{1}{\omega}(....) + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

Puis qu'on insère dans (8) :

$$z_2^k = \frac{1}{(1-k^2)\omega^2} \sum_{s(\alpha)=k,\alpha_i\in\{\pm1\}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \qquad (9)$$

(de nouveau z^α ne contient que $z_2^{\pm1}$)

- $$y_2 = -\frac{1}{\omega^2}\ddot{y}_2 + \frac{1}{\omega^2}g_2(y_1,0) + \frac{1}{\omega^2}\sum_{s(\alpha)=0}\frac{1}{m!}g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \qquad (10)$$

qu'on dérive deux fois *(pour éliminer le terme $\ddot{y}_2$) :*

$$\dot{y}_2 = -\frac{1}{\omega^2}\dddot{y}_2 + \frac{1}{\omega^2}\Big(g_2(y_1,0)\Big)^{(1)} + \frac{1}{\omega^2}\Big(\sum_{s(\alpha)=0}\frac{1}{m!}g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha\Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{\omega^2}(....) + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

Ce qui nous donne, en insérant le tout dans (10) :

$$y_2 = \frac{1}{\omega^2} g_2(y_1,0) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \tag{11}$$

- $$\dot{z}_2 = -\frac{1}{2i\omega}\ddot{z}_2 + \frac{1}{2i\omega}\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}} g_2(y_1,0)(z^\alpha,y_2)\Big) + \mathcal{O}(\omega^{-3}) \tag{12}$$

qu'on dérive, puis on insère $\ddot{z}_2 = -\frac{1}{2i\omega}\dddot{z}_2 + \frac{1}{2i\omega}\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\dots\Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-3})$ et $\dddot{z}_2 = \mathcal{O}(\omega^{-1})$ dans (12) et en remarquant que $y_2 = \mathcal{O}(\omega^{-2})$:

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2i\omega}\sum_{s(\alpha)=1,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha \frac{1}{4\omega^2}\sum_{s(\alpha)=1,\alpha\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_1 \partial y_2^m} g_2(\dot{y}_1,z^\alpha) + \mathcal{O}(\omega^{-3})$$

- $$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= g_1(y_1,0) + \frac{\partial}{\partial y_2} g_1(y_1,0) y_2 + \sum_{s(\alpha)=0}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1,0) z^\alpha + \\
&+ \sum_{\substack{s(\alpha)=0,\alpha_1\in\{\pm1,\pm2,\dots,\pm(m-1)\}\\ \alpha_2,\dots,\alpha_m\in\{\pm1\}}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_1 \partial y_2^{m-1}} g_1(y_1,0)(z_1^{\alpha_1},z_2^{\alpha_2},\dots,z_2^{\alpha_m}) + \dots \\
&+ \sum_{\substack{s(\alpha)=0,\alpha_m\in\{\pm1,\pm2,\dots,\pm(m-1)\}\\ \alpha_1,\dots,\alpha_{m-1}\in\{\pm1\}}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^{m-1}\partial y_1} g_1(y_1,0)(z_2^{\alpha_1},z_2^{\alpha_2},\dots,z_1^{\alpha_m}) + \\
&+ \sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}} g_1(y_1,0)(z^\alpha,y_2) + \mathcal{O}(\omega^{-3})
\end{aligned}$$

Où dans la première somme un α_i peut être différent de ±1. Puis on utilise (11) et (7) :

$$\begin{aligned}
\ddot{y}_1 &= g_1(y_1,0) + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y_2} g_1(y_1,0)\Big(g_2(y_1,0) + \sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha\Big) + \\
&+ \sum_{s(\alpha)=0}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1,0) z^\alpha + \\
&+ \sum_{\substack{s(\alpha)=0,\alpha_1\in\{\pm1,\pm2,\dots,\pm(m-1)\}\\ \alpha_2,\dots,\alpha_m\in\{\pm1\}}} \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_1 \partial y_2^{m-1}} g_1(y_1,0) \\
&\Big(-\frac{1}{{\alpha_1}^2\omega^2}\sum_{s(\beta)=\alpha_1,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_1(y_1,0) z^\beta, z_2^{\alpha_2},\dots,z_2^{\alpha_m}\Big) + \dots \\
&+ \sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}} g_1(y_1,0)\Big(z^\alpha, \frac{1}{\omega^2} g_2(y_1,0) + \\
&+ \frac{1}{\omega^2}\sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m} g_2(y_1,0) z^\alpha\Big) + \mathcal{O}(\omega^{-3})
\end{aligned} \tag{13}$$

c) Prenons notre courage à deux mains et essayons jusqu'à $\mathcal{O}(\omega^{-4})$:

- Heureusement que les formules pour z_1,z_1^k,z_2^k,y_2 et $\ddot{y}_1$ sont les mêmes que pour $\mathcal{O}(\omega^{-3})$
- Pour $\dot{z}_2$, c'est un peu plus long :

$$\dot{z}_2 = -\frac{1}{2i\omega}\ddot{z}_2 + \frac{1}{2i\omega}\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(z^\alpha,y_2)\Big) + \mathcal{O}(\omega^{-4})$$

Où dans la première partie de la somme, on a au maximum un z_j^k et dans la deuxième partie que du $z_2^{\pm 1}$.

On dérive trois fois, et on obtient:

$$\ddot{z}_2 = -\frac{1}{2i\omega}\dddot{z}_2 + \frac{1}{2i\omega}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(1)} + \mathcal{O}(\omega^{-4})$$

$$\dddot{z}_2 = -\frac{1}{2i\omega}z_2^{(4)} + \frac{1}{2i\omega}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(2)} + \mathcal{O}(\omega^{-4})$$

$$z_2^{(4)} = -\frac{1}{2i\omega}z_2^{(5)} + \frac{1}{2i\omega}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(3)} + \mathcal{O}(\omega^{-4})$$

d'où :

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2i\omega}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big) - (\frac{1}{2i\omega})^2\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(1)} + (\frac{1}{2i\omega})^3\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(2)} + \mathcal{O}(\omega^{-4}) \tag{14}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(1)} := &\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^\alpha,\dot{y}_1) + g_2^{(m)}(y_1,0)(\dot{z}^{\alpha_1},z^{\alpha_2},...,z^{\alpha_m}) + ...\\ &+ g_2^{(m)}(y_1,0)(z^{\alpha_1},z^{\alpha_2},...,\dot{z}^{\alpha_m})\Big)+\\ &+\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial^{m+2}}{\partial y_1\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(\dot{y}_1,z^\alpha,y_2) + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(\dot{z}^{\alpha_1},...,z^{\alpha_m},y_2)+\\ &... + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(z^{\alpha_1},...,\dot{z}^{\alpha_m},y_2) + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(z^{\alpha_1},...,z^{\alpha_m},\dot{y}_2)\Big)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{s(\alpha)=1}\Big)^{(2)} := &\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^\alpha,\dot{y}_1,\dot{y}_1) + 2\frac{\partial}{\partial y_1}g_2^{(m)}(y_1,0)(\dot{z}^{\alpha_1},z^{\alpha_2},...,z^{\alpha_m},\dot{y}_1) + ...\\ &+ \frac{\partial}{\partial y_1}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^{\alpha_1},z^{\alpha_2},...,z^{\alpha_m},\ddot{y}_1) + ... + g_2^{(m)}(y_1,0)(z^{\alpha_1},...,\ddot{z}^{\alpha_m})\Big)+\\ &+\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial^{m+3}}{\partial y_1^2\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(\dot{y}_1,\dot{y}_1,z^\alpha,y_2) + ... + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(z^{\alpha_1},...,z^{\alpha_m},\ddot{y}_2)\Big)\end{aligned}$$

On insère le tout dans (14), en remarquant que $y_2 = \mathcal{O}(\omega^{-2})$, $\dot{z}_2 = \mathcal{O}(\omega^{-1})$ (donc beaucoup de *termes se simplifient (ouf!)) et en utilisant (11) ainsi que (13):*

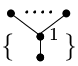
$$
\begin{aligned}
\dot z_2 = {} & \frac{1}{2i\omega}\sum_{s(\alpha)=1}\frac{1}{m!}\Big(g_2^{(m)}(y_1,0)z^\alpha + \\
& + \frac{\partial^{m+1}}{\partial y_2^{m+1}}g_2(y_1,0)(z^\alpha,\frac{1}{\omega^2}g_2(y_1,0) + \frac{1}{\omega^2}\sum_{s(\alpha)=0,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial y_2^m}g_2(y_1,0)z^\alpha)\Big) + \\
& - (\frac{1}{2i\omega})^2\sum_{s(\alpha)=1,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial}{\partial y_1}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^\alpha,\dot y_1)+...\Big) + \\
& + (\frac{1}{2i\omega})^3\sum_{s(\alpha)=1,\alpha_i\in\{\pm1\}}\frac{1}{m!}\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^\alpha,\dot y_1,\dot y_1)+\ldots+ \\
& + \frac{\partial}{\partial y_1}g_2^{(m)}(y_1,0)(z^{\alpha_1},z^{\alpha_2},...,z^{\alpha_m},g_1(y_1,0)+...)\Big) + \mathcal{O}(\omega^{-4})
\end{aligned}
\tag{15}
$$

En conclusion à ce chapitre: si nous voulons continuer, il nous faut un besoin urgent de nouvelles définitions. Ce qui nous amène à :

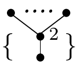
3 Les arbres

3.1 Définitions et exemples

Définition 3.1 *On définit l'ensemble des arbres* $\mathcal{T} := \{\bullet\ ,\circ^1,\circ^{-1},\diagup^1,\diagup^2,..\}$ *par récurrence: si* $\tau_1,..,\tau_m \in \mathcal{T}$ *alors l'arbre obtenu en reliant les racines de* $\tau_1,..,\tau_m$ *(i.e. les noeuds les plus bas) au noeud supérieur de* $\diagup^1$ *ou de* $\diagup^2$ *appartient à* $\mathcal{T}$ *,i.e.* $[[\tau_1,...,\tau_m]_i] \in \mathcal{T}$ *pour* $i = 1,2$.
$\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ *est l'ensemble des arbres de la forme* $[[\tau_1,...,\tau_m]_1]$ *avec* $\tau_i \in \mathcal{T}$ *et de l'arbre* $\bullet$ *c.à.d, :*

$\mathcal{T}_1 := \{$  $\} \cup \{\bullet\}$

De la même manière $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}$ *est l'ensemble des arbres avec le premier noeud 2 et des arbres* $\circ^1$, $\circ^{-1}$*:*

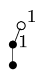
$\mathcal{T}_2 := \{$  $\} \cup \{\circ^1,\circ^{-1}\}$

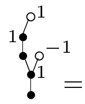
Définition 3.2 *Pour* $\mathcal{Y} := (y_1,\dot y_1,z_2^1,z_2^{-1})$*, on définit la différentielle élementaire :*

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}(\bullet)(\mathcal{Y}) = \dot y_1 && \\
&\mathcal{F}(\circ^1)(\mathcal{Y}) = z_2^1 && \mathcal{F}(\circ^{-1})(\mathcal{Y}) = z_2^{-1} \\
&\mathcal{F}(\diagup^1)(\mathcal{Y}) = g_1(y_1,0) && \mathcal{F}(\diagup^2)(\mathcal{Y}) = g_2(y_1,0)
\end{aligned}
$$

Et pour un arbre $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$*, par récurrence,* $\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) = D_1^a D_2^b g_i(y_1,0)(\mathcal{F}(\tau_1)(\mathcal{Y}),..,\mathcal{F}(\tau_m)(\mathcal{Y}))$ *où:*
$i \in \{1,2\}$
On dérive par rapport à y_1 *si* $\tau_i \in \mathcal{T}_1$ *et par rapport à* y_2 *si* $\tau_i \in \mathcal{T}_2$.

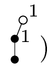
Exemple:

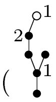
L'arbre qui correspond à $\frac{\partial}{\partial y_2}g_1(y_1,0)(z_2^1)$ est  $= [[\circ^1]_1]$

De la même manière $\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} g_1(y_1,0)(\frac{\partial}{\partial y_2} g_1(y_1,0) z_2^1, z_2^{-1})$ correspond à  $= [[[[\circ^1]_1], \circ^{-1}]_1]$

Définition 3.3 *L'ordre d'un arbre τ est $\rho(\tau)$, c'est le nombre de noeuds différents de $\circ^1$ et de $\circ^{-1}$*

Exemple:

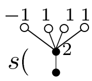
$\rho($  $) = 2$

$\rho($  $) = 5$

Définition 3.4 *Le poids d'un arbre $s(\tau)$ est $n-m$ où n est le nombre de noeuds de la forme* $\circ^1$ *et n est le nombre de* $\circ^{-1}$.

Exemple:

$s($  $) = 0$

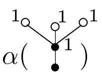
$s($  $) = -1+1+1+1 = 2$

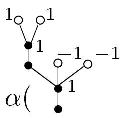
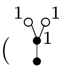
Définition 3.5 *On pose* $\alpha(\bullet) = \alpha(\circ^1) = \alpha(\circ^{-1}) = \alpha($  $) = \alpha($  $) = 1$ *et pour l'arbre* $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$ *:*

$$\alpha(\tau) = \begin{pmatrix} \rho(\tau)-2 \\ \rho(\tau_1),...,\rho(\tau_m) \end{pmatrix} \alpha(\tau_1)\cdot ... \cdot\alpha(\tau_m)\tfrac{1}{\mu_1!\mu_2!\cdot..}$$

où $\mu_1,\mu_2,..$ comptent le nombre de même arbres dans $\{\tau_1,...,\tau_m\}$ et $\begin{pmatrix} \rho(\tau)-2 \\ \rho(\tau_1),...,\rho(\tau_m) \end{pmatrix} := \frac{(\rho(\tau)-2)!}{\rho(\tau_1)!\cdot...\cdot\rho(\tau_m)!}$

Exemple:

$\alpha($  $) = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 0,0,0 \end{pmatrix} \alpha(\circ^1)\alpha(\circ^1)\alpha(\circ^1)\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$

$\alpha($  $) = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2,0,0 \end{pmatrix} \alpha($  $)\alpha(\circ^{-1})\alpha(\circ^{-1})\frac{1}{2!} =$

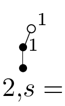
$= 1\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,0 \end{pmatrix} \alpha(\circ^1)\alpha(\circ^1)\frac{1}{2!}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2!} = \frac{1}{4}$

3.2 Motivations pour les B-séries

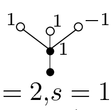
Le but de ce paragraphe est de se familliariser avec les nouvelles notations et de préparer le terrain pour l'étude des solutions lisses de (1).
Exprimons quelques termes des séries du chapitre 2 sous la forme d'arbres:

- Les arbres correspondant aux termes de la série suivante sont (à comparer avec (5)):

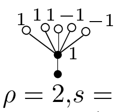
$$z_1 = -\tfrac{1}{\omega^2}\tfrac{\partial}{\partial y_2}g_1(y_1,0)(z_2^1) - \tfrac{1}{\omega^2}\tfrac{1}{3!}\tfrac{\partial^3}{\partial y_2^3}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) - \tfrac{1}{\omega^2}\tfrac{1}{5!}\tfrac{\partial^5}{\partial y_2^5}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1},z_2^{-1}) + ...$$



$\rho = 2, s = 1,$
$\alpha = 1$



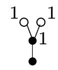
$\rho = 2, s = 1,$
$\alpha = \frac{1}{2}$



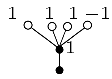
$\rho = 2, s = 1,$
$\alpha = \frac{1}{12}$

- Ceux correspondant aux termes de la série suivante sont (voir (7)):

$$z_1^2 = -\frac{1}{4\omega^2}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1) - \frac{1}{4\omega^2}\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial y_2^4}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + ...$$



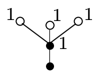
$\rho = 2, s = 2,$
$\alpha = \frac{1}{2}$



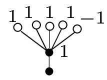
$\rho = 2, s = 2,$
$\alpha = \frac{1}{6}$

- Pour les termes de la série suivante, on a (cf.(7)):

$$z_1^3 = -\frac{1}{9\omega^2}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial y_2^3}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1) - \frac{1}{9\omega^2}\frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial y_2^5}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + ...$$



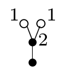
$\rho = 2, s = 3,$
$\alpha = \frac{1}{6}$



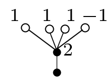
$\rho = 2, s = 3,$
$\alpha = \frac{1}{24}$

- Les arbres correspondant aux termes de la série de z_2^2 sont (voir (9)) :

$$z_2^2 = -\frac{1}{3\omega^2}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1) - \frac{1}{3\omega^2}\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial y_2^4}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + ...$$



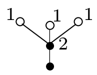
$\rho = 2, s = 2,$
$\alpha = \frac{1}{2}$



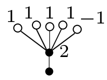
$\rho = 2, s = 2,$
$\alpha = \frac{1}{6}$

- Ceux correspondant aux termes de la série suivante sont (à comparer avec (9)) :

$$z_2^3 = -\frac{1}{8\omega^2}\frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial y_2^3}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1) - \frac{1}{8\omega^2}\frac{1}{5!}\frac{\partial^5}{\partial y_2^5}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + ...$$



$\rho = 2, s = 3,$
$\alpha = \frac{1}{6}$

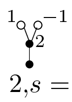


$\rho = 2, s = 3,$
$\alpha = \frac{1}{24}$

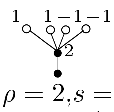
- Les arbres correspondant aux termes de la série de y_2 sont (cf. (11)) :

$$y_2 = \frac{1}{\omega^2}g_2(y_1,0) + \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1}) + \frac{1}{\omega^2}\frac{1}{4!}\frac{\partial^4}{\partial y_2^4}g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^{-1},z_2^{-1}) + ...$$

$\rho = 2, s = 0,$
$\alpha = 1$



$\rho = 2, s = 0,$
$\alpha = 1$

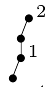


$\rho = 2, s = 0,$
$\alpha = \frac{1}{4}$

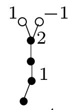
- En exploitant la multilinéarité des dérivées et en remplaçant z_1^1 et z_1^2 par le premier arbre de leurs séries, on a (voir (13)):

$$\ddot{y}_1 = \quad g_1(y_1,0) \quad + \frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y_2} g_1(y_1,0)(g_2(y_1,0)) + \frac{1}{2}\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial y_2} g_1(y_1,0)\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1})\Big)+$$

$\rho = 2, s = 0,$
$\alpha = 1$

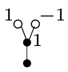


$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = 1$

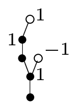


$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = 1$

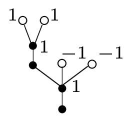
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} g_1(y_1,0)(z_1^1,z_2^{-1}) + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3}{\partial y_1 \partial y_2^2} g_1(y_1,0)(z_1^2,z_2^{-1},z_2^{-1})+$$



$\rho = 2, s = 0,$
$\alpha = 1$

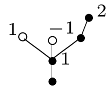


$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = 1$

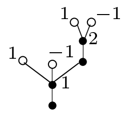


$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = \frac{1}{4}$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial y_2^3} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1},\frac{1}{\omega^2} g_2(y_1,0)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^3}{\partial y_2^3} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1},\frac{1}{\omega^2}\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1})) + ...$$



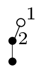
$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = 1$



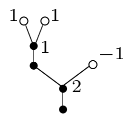
$\rho = 4, s = 0,$
$\alpha = 1$

- En ce qui concerne $\dot{z}_2$ on a (en se rappelant de (15)):

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2i\omega}\frac{\partial}{\partial y_2} g_2(y_1,0)(z_2^1) + \frac{1}{4i\omega}\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} g_2(y_1,0)\Big(- \frac{1}{8\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1),z_2^{-1}\Big)+$$

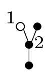


$\rho = 2, s = 1,$
$\alpha = 1$

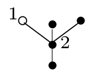


$\rho = 4, s = 1,$
$\alpha = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{4\omega^2}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} g_2(y_1,0)(z_2^1,\dot{y}_1) - \frac{1}{8i\omega^3}\frac{\partial^3}{\partial y_2 \partial y_1^2} g_2(y_1,0)(z_2^1,\dot{y}_1,\dot{y}_1)+$$

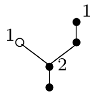


$\rho = 3, s = 1,$
$\alpha = 1$



$\rho = 4, s = 1,$
$\alpha = 1$

$-\frac{1}{8i\omega^3}\frac{\partial^2}{\partial y_2 \partial y_1} g_2(y_1,0)\big(z_2^1, g_1(y_1,0)\big) + ...$



$\rho = 4, s = 1,$
$\alpha = 1$

4 B-séries et quelques lemmes

4.1 Définitions et labelling

Définition 4.1 *Pour $a : \mathcal{T} \cup \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$, on appelle les séries formelles suivantes des B-séries:*

$$\left.\begin{aligned} B_{y_1}(a,\mathcal{Y}) &= a(\emptyset)y_1 + \textstyle\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_1\setminus\{\bullet\} \\ s(\tau)=0}} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)a(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \\ B_{y_2}(a,\mathcal{Y}) &= \textstyle\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_2 \\ s(\tau)=0}} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)a(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \end{aligned}\right\} \text{ et } B_Y(a,\mathcal{Y}) := \begin{pmatrix} B_{y_1}(a,\mathcal{Y}) \\ B_{y_2}(a,\mathcal{Y}) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} B_{z_2^{\pm1}}(a,\mathcal{Y}) &= \textstyle\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_2 \\ s(\tau)=\pm1}} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)a(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \\ B_{z_j^k}(a,\mathcal{Y}) &= \textstyle\sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_j \\ s(\tau)=k}} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)a(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \end{aligned}\right\} \text{ et } B_{Z^k}(a,\mathcal{Y}) := \begin{pmatrix} B_{z_1^k}(a,\mathcal{Y}) \\ B_{z_2^k}(a,\mathcal{Y}) \end{pmatrix} \text{ où } j = 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Lemme 4.2 *Soient $a : \mathcal{T} \cup \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ tel que $a(\emptyset) = 1$ et $W := B_Y(a,\mathcal{Y}) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{Z^k}(a,\mathcal{Y})$ alors $\omega^{-2}g(W) = B_Y(a'',\mathcal{Y}) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{Z^k}(a'',\mathcal{Y})$ avec $a''(\tau) = 0$ si $\rho(\tau) \leq 1$, $a''(\,{}^{1}) = a''(\,{}^{2}) = 2$, $a''(\tau) = \rho(\tau)(\rho(\tau)-1)a(\tau_1)\cdot ..\cdot a(\tau_m)$ si $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$ $i = 1,2$.*

Démonstration: Bien évidemment, on commence par utiliser Taylor

$$\omega^{-2}g\big((y_1,0) + W - (y_1,0)\big) = \omega^{-2}\sum_{m\geq 1}\frac{g^{(m)}(y_1,0)}{m!}\big(W-(y_1,0)\big)^m$$

En utilisant la multilinéarité des dérivées et le fait que $e^0 = 1$, on obtient :

$$\omega^{-2}g(W) = \omega^{-2}\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{k_1,..,k_m\in\mathbb{Z}} e^{i\Sigma_{j=1}^m k_j t\omega} \sum_{\substack{\tau_1,..,\tau_m t.q. \\ s(\tau_1)=k_1,..,s(\tau_m)=k_m}} \frac{\omega^{-(\rho(\tau_1)+..+\rho(\tau_m))}}{\rho(\tau_1)!\cdot ..\cdot\rho(\tau_m)!}\alpha(\tau_1)\cdot ..\cdot\alpha(\tau_m)\cdot$$

$$\cdot a(\tau_1)\cdot ..\cdot a(\tau_m) g^{(m)}(y_1,0)(\mathcal{F}(\tau_1)(\mathcal{Y}),..,\mathcal{F}(\tau_m)(\mathcal{Y})) =$$

$$= \omega^{-2}\sum_{m\geq 1}\frac{1}{m!}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{\substack{k_1,..,k_m \\ \Sigma k_i = k}} e^{ikt\omega}\sum_{\substack{\tau_1,..,\tau_m t.q. \\ s(\tau_1)=k_1,..,s(\tau_m)=k_m}}\frac{\omega^{-(\rho(\tau)-2)}}{\rho(\tau_1)!\cdot ..\cdot\rho(\tau_m)!}\alpha(\tau_1)\cdot ..\cdot\alpha(\tau_m)a(\tau_1)\cdot ..\cdot a(\tau_m)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})$$

En se rappelant de la définition de α et pour $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$, cette expression devient :

$$\sum_{k\in\,\mathbb{Z}}\sum_{m\geq 1}\sum_{\Sigma k_i=k} e^{ik\omega t}\sum_{\substack{\tau_1,..,\tau_m t.q.\\ s(\tau_1)=k_1,..,s(\tau_m)=k_m}}\frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{(\rho(\tau)-2)!}\alpha(\tau)\frac{\mu_1!\mu_2!..}{m!}a(\tau_1)\cdot..\cdot a(\tau_m)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) =$$

$$\sum_{k\in\,\mathbb{Z}} e^{ik\omega t}\sum_{\substack{\tau t.q.\\ s(\tau)=k}}\frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\rho(\tau)(\rho(\tau)-1)\alpha(\tau)a(\tau_1)\cdot..\cdot a(\tau_m)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) = B_Y(a'',\mathcal{Y}) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t}B_{Z^k}(a'',\mathcal{Y})$$

L'avant-dernière égalité vient du fait qu'il y a $\begin{pmatrix} m \\ \mu_1,\mu_2,.. \end{pmatrix}$ possibilités d'écrire l'arbre τ de la forme $[[\tau_1,...,\tau_m]_i]$ □

Définition 4.3 *De la même manière, on définit les B-séries pour $\ddot{y}_1$ et $\dot{z}_2^{\pm 1}$:*

$$B_{\ddot{y}_1}(b,\mathcal{Y}) = \sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_1\backslash\{\bullet\}\\ s(\tau)=0}}\frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{(\rho(\tau)-1)!}\alpha(\tau)b(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})$$

et

$$B_{z_2^{\pm 1}}(b,\mathcal{Y}) = \sum_{\substack{\tau\in\mathcal{T}_2\\ s(\tau)=\pm 1}}\frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)b(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})$$

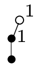
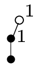
où $b : \mathcal{T}\cup\{\emptyset\}\to\mathbb{R}$ est tel que $b(\tau) = 0$ pour $\rho(\tau) = 0$ et $b(\bullet\!\!-\!\!\bullet^{1}) = b(\bullet) = 1$

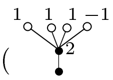
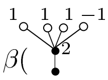
Pour la suite il est plus agréable de travailler avec des arbres étiquetés (labelled tree en anglais).

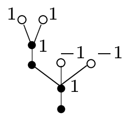
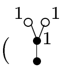
Définition 4.4 *On étiquette un arbre monotoniquement à partir de la racine les noeuds différents de $\circ^1$ et de $\circ^{-1}$, puis pour les noeuds qui ne sont pas à la fin d'une branche on numérote de 1 à $q_{\pm 1}$ les sous-arbres u de poids $s(u) = \pm 1$ où $q_{\pm 1}$ égal au nombre d'éléments dans $\{\tau_1,...,\tau_m\}$ tel que $s(\tau) = \pm 1$. Le nombre de ces étiquetages, pour un arbre τ, est noté $lab(\tau)$.*

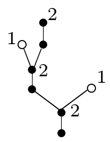
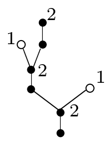
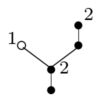
Remarque: On montre, par des arguments de combinatoire, que $lab(\tau) = \alpha(\tau)\cdot\beta(\tau)$ où $\beta(\bullet) = \beta(\circ^1) = \beta(\circ^{-1}) = \beta(\bullet\!\!-\!\!\bullet^{1}) = \beta(\bullet\!\!-\!\!\bullet^{2}) = 1$ et pour $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$: $\beta(\tau) = \beta(\tau_1)\cdot..\cdot\beta(\tau_m)\cdot q_1!\cdot q_{-1}!$ avec $q_{\pm 1}$ égal au nombre d'éléments dans $\{\tau_1,...,\tau_m\}$ tel que $s(\tau) = \pm 1$.

Exemple:

$lab($  $) = 1 \cdot \beta($  $) = 1$

$lab($  $) = \frac{1}{3!} \cdot \beta($  $) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3! = 1$

$lab($  $) = \frac{1}{4} \cdot \beta($  $) \cdot \beta(\circ^{-1}) \cdot \beta(\circ^{-1}) \cdot 2! = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = 1$

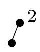
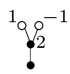
$lab($  $) = 1 \cdot \beta($  $) = \beta($  $) \cdot \beta(\circ^{1}) \cdot 2 = 2$

4.2 Splitting

Le but de ce paragraphe est de voir ce qu'il se passe quand on dérive formellement une B-série.
Nous allons dans un premier temps dériver les séries du paragraphe (3.2) et regarder ce qu'il se passe au niveau des arbres, puis nous allons énoncer et démontrer ce principe rigoureusement.
Afin d'alléger la notation nous introduisons les opérateurs différentiels $D_j^k = \frac{\partial^k}{\partial y_j^k}$ et nous n'écrivons pas les coefficients des séries.
Pour la suite, $\mathcal{Y}(t) := (y_1(t), \dot{y}_1(t), z_2^1(t), z_2^{-1}(t))$

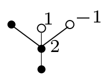
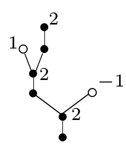
- Après dérivation de

$$B_{y_2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot \cdot g_2(y_1,0) + \cdot \cdot D_{2,2}^2 g_2(y_1,0)(z_2^1, z_2^{-1}) + \dots$$

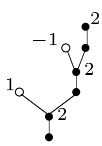
 

Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{y_2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot \cdot D_1 g_2(y_1,0)(\dot{y}_1) + \cdot \cdot D_{1,2,2}^3 g_2(y_1,0)(\dot{y}_1, z_2^1, z_2^{-1}) + \cdot \cdot D_{2,2}^2 g_2(y_1,0)(\dot{z}_2^1, z_2^{-1}) +$$

$$+ \cdot \cdot D_{2,2}^2 g_2(y_1,0)(z_2^1, \dot{z}_2^{-1}) + \dots$$

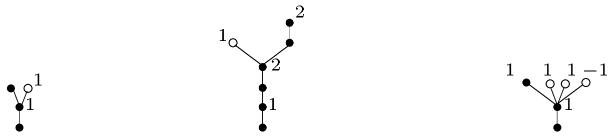


- Pour la série

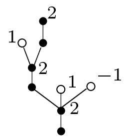
$$B_{z_1}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(z_2^1) + \cdot\cdot\, D^3_{2,2,2} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + \ldots$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{z_1}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_1(y_1,0)(\dot{y}_1,z_2^1) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(\dot{z}_2^1) + \cdot\cdot\, D_1 D^3_{2,2,2} g_1(y_1,0)(\dot{y}_1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) +$$



$$+ \cdot\cdot D^3_{2,2,2} g_1(y_1,0)(\dot{z}_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + \cdot\cdot\, D^3_{2,2,2} g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,\dot{z}_2^{-1}) + \ldots$$



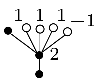
- En ce qui concerne :

$$B_{z_2^2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1) + \cdot\cdot\, D^4_{2,2,2,2} g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + \ldots$$

Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} B_{z_2^2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D^3_{1,2,2} g_2(y_1,0)(\dot{y}_1,z_2^1,z_2^1) + \cdot\cdot\, D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(\dot{z}_2^1,z_2^1) +$$

$$+ \cdot\cdot D_1 D^4_{2,2,2,2} g_2(y_1,0)(\dot{y}_1,z_2^1,z_2^1,z_2^1,z_2^{-1}) + \ldots$$

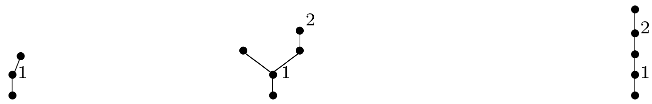


- En dérivant la série suivante

$$B_{\ddot{y}_1}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, g_1(y_1,0) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(g_2(y_1,0)) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(z_2^1,z_2^{-1})) + \ldots$$

Nous avons :

$\frac{\partial}{\partial t} B_{\ddot{y}_1}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D_1 g_1(y_1,0)(\dot{y}_1) + \cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_1(y_1,0)(\dot{y}_1, g_2(y_1,0)) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(D_1 g_2(y_1,0)(\dot{y}_1)) +$

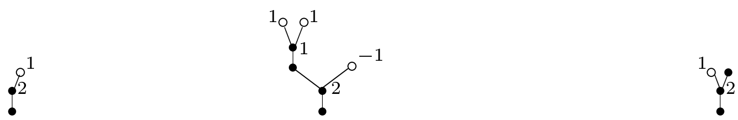


$$\cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_1(y_1,0)(\dot{y}_1, D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(z_2^1, z_2^{-1})) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(D^3_{1,2,2} g_2(y_1,0)(\dot{y}_1, z_2^1, z_2^{-1})) +$$

$$\cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(\dot{z}_2^1, z_2^{-1})) + \cdot\cdot\, D_2 g_1(y_1,0)(D^2_{2,2} g_2(y_1,0)(z_2^1, \dot{z}_2^{-1})) + ...$$

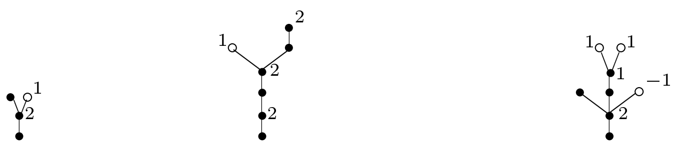
- Enfin, pour la série

$B_{\dot{z}_2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D_2 g_2(y_1,0)(z_2^1) + \cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_2(y_1,0)(D^2_{2,2} g_1(y_1,0)(z_2^1, z_2^1)) + \cdot\cdot\, D^2_{2,1} g_2(y_1,0)(z_2^1, \dot{y}_1) + \ldots$



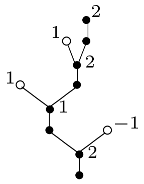
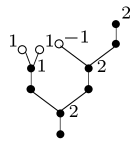
On a :

$\frac{\partial}{\partial t} B_{\dot{z}_2}(a,\mathcal{Y}(t)) = \cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_2(y_1,0)(\dot{y}_1, z_2^1) + \cdot\cdot\, D_2 g_2(y_1,0)(\dot{z}_2^1) + \cdot\cdot\, D^3_{1,1,2} g_2(y_1,0)\big(\dot{y}_1, D^2_{2,2} g_1(y_1,0)(z_2^1, z_2^1), z_2^{-1}\big) +$

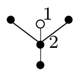
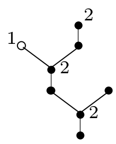
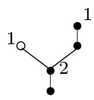


$$\cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_2(y_1,0)\big(D^3_{1,2,2} g_1(y_1,0)(\dot{y}_1, z_2^1, z_2^1), z_2^{-1}\big) + \cdot\cdot\, D^2_{1,2} g_2(y_1,0)\big(D^2_{2,2} g_1(y_1,0)(\dot{z}_2^1, z_2^1), z_2^{-1}\big) +$$

$$\cdot\cdot\, D^2_{1,2}g_2(y_1,0)\big(D^2_{2,2}g_1(y_1,0)(z_2^1,\dot z_2^1),z_2^{-1}\big)+\cdot\cdot\, D^2_{1,2}g_2(y_1,0)\big(D^2_{2,2}g_1(y_1,0)(z_2^1,z_2^1),\dot z_2^{-1}\big)+$$

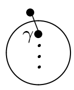



$$\cdot\cdot\, D^3_{1,2,1}g_2(y_1,0)(\dot y_1,z_2^1,\dot y_1)+\cdot\cdot\, D^2_{2,1}g_2(y_1,0)(\dot z_2^1,\dot y_1)+\cdot\cdot\, D^2_{2,1}g_2(y_1,0)(z_2^1,\ddot y_1)+...$$

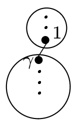
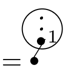




Définition 4.5 *Soient $u,v \in \mathcal{T}$ et γ un noeud de u. En collant v à u sur le noeud γ par l'une des trois possibilités ci-dessous, on obtient un arbre τ. C'est le splitting de τ et on le note $\tau = u \circ_\gamma v$ $(\emptyset \circ \tau =: \tau)$. Les trois splittings possibles sont :*

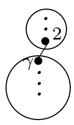
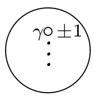
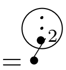
S1) Splitting 1

Si $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  *et* $v =$ $\bullet$

S2) Splitting 2

Si $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  *et* $v =$  *si* $s(v) = 0$.

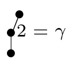
S3) Splitting 3

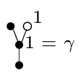
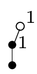
Si $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  *et* $v =$  *si* $s(v) = \pm 1$.

On note $lab(u \circ_\gamma v)$ le nombre d'étiquetages de $\tau = u \circ_\gamma v$ tel que les $\rho(u)$ premières étiquettes sont attachées à u.

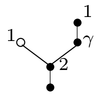
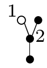
Exemple:

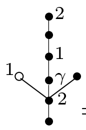
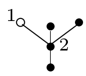
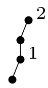
S1)

Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ $\bullet$

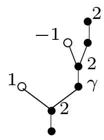
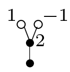
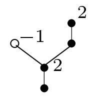
Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ $\bullet$

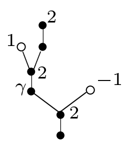
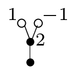
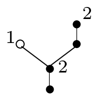
S2)

Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ 

Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ 

S3)

Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ 

Pour $\tau =$  $\Longrightarrow$ $u =$  et $v =$ 

Lemme 4.6 *Supposons que* $\omega^{-2}\ddot{y}_1(t) = B_{\ddot{y}_1}(b,\mathcal{Y}(t)),\omega^{-1}\dot{z}_2^{\pm 1}(t) = B_{z_2^{\pm 1}}(b,\mathcal{Y}(t))$ *et* $b(\bullet\ ) = 1$. *Alors pour une fonction* $c : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, *on a*

$$\omega^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_{..}(c,\mathcal{Y}(t)) = B_{..}(\partial_b c,\mathcal{Y}(t)) \tag{16}$$

où on remplace .. par y_j *ou* z_j^k *et* $\partial_b c(\tau) = 0$ *pour* $\rho(\tau) = 0,\partial_b c(\bullet\ ) = c(\emptyset)$ *et*
$\partial_b c(\tau) = \displaystyle\sum_{u\circ_\gamma v=\tau}\begin{pmatrix}\rho(\tau)\\ \rho(u)\end{pmatrix}\frac{lab(u\circ_\gamma v)}{lab(\tau)}c(u)b(v)$ *pour* $\rho(\tau) \geq 1$. *La somme étant prise sur tous les splittings de* τ.

Démonstration: Comme dans la démonstration du lemme 4 de [2], on introduit l'ensemble des arbres étiquetés: $\mathcal{LT}_j$. Comme $lab(\tau) = \alpha(\tau)\cdot\beta(\tau)$, la somme $\sum_{\tau\in\mathcal{T}_j}\alpha(\tau)\cdot/\cdot$ devient $\sum_{\tau\in\mathcal{LT}_j}\frac{1}{\beta(\tau)}\cdot/\cdot$.

$$\omega^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_{..}(c,\mathcal{Y}(t)) = \omega^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{u\in\mathcal{LT}_j}\frac{1}{\beta(u)}\frac{\omega^{-\rho(u)}}{\rho(u)!}c(u)\mathcal{F}(u)(\mathcal{Y}(t)) = \sum_{u\in\mathcal{LT}_j}\frac{1}{\beta(u)}\frac{\omega^{-\rho(u)}}{\rho(u)!}c(u)\omega^{-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(u)(\mathcal{Y}(t)) =$$

$$= \sum_{u\in\mathcal{LT}_j}\frac{1}{\beta(u)}\frac{\omega^{-\rho(u)}}{\rho(u)!}c(u)\left(\sum_{\substack{\gamma admissible\\ S2}}\sum_{v\in\mathcal{LT}}\frac{1}{\beta(v)}\frac{\omega^{-\rho(v)+1}}{(\rho(v)-1)!}b(v)\mathcal{F}(u\circ_\gamma v))(\mathcal{Y}(t)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{\gamma admissible\\ S1,S3}}\sum_{v\in\mathcal{LT}}\frac{1}{\beta(v)}\frac{\omega^{-\rho(v)}}{\rho(v)!}b(v)\mathcal{F}(u\circ_\gamma v))(\mathcal{Y}(t))\right) =$$

On pose $\tau = u\circ_\gamma v$, d'où $\rho(\tau) = \rho(u)+\rho(v)-1$ pour le splitting 2 et $\rho(\tau) = \rho(u)+\rho(v)$ pour les splittings 1 et 3. De plus $\beta(\tau) = \beta(u)\cdot\beta(v)$. On utilise encore le fait que pour tout étiquetages de u et de v, il existe un unique étiquetage de τ, et tout étiquetage de τ est obtenu ainsi.

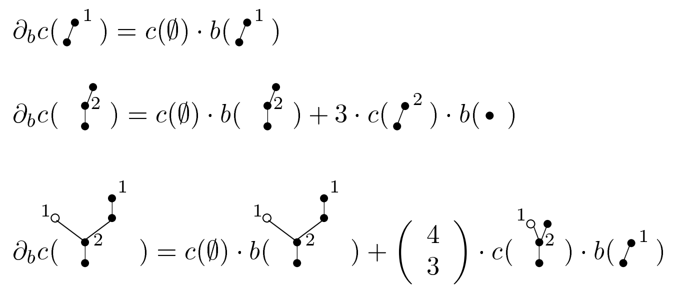
$$= \sum_{\tau \in \mathcal{LT}_j} \frac{1}{\beta(\tau)} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \left(\sum_{\substack{u \circ_\gamma v = \tau \\ S2}} \frac{\rho(\tau)!}{\rho(u)!(\rho(v)-1)!} c(u)b(v)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}(t)) + \sum_{\substack{u \circ_\gamma v = \tau \\ S1,S3}} \frac{\rho(\tau)!}{\rho(u)!\rho(v)!} c(u)b(v)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}(t)) \right) =$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{LT}_j} \frac{1}{\beta(\tau)} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \sum_{u \circ_\gamma v = \tau} \begin{pmatrix} \rho(\tau) \\ \rho(u) \end{pmatrix} c(u)b(v)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}(t)) =$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{T}_j} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!} \alpha(\tau) \sum_{u \circ_\gamma v = \tau} \begin{pmatrix} \rho(\tau) \\ \rho(u) \end{pmatrix} \frac{lab(u \circ_\gamma v)}{lab(\tau)} c(u)b(v)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}(t))$$

□

Exemple:



4.3 Formules de récurrence pour les coefficients des B-séries

Notre but est maintenant d'écrire $y_1, y_2, z_j^k, \ddot{y}_1, \dot{z}_2^{\pm 1}$ sous forme de B-séries.
Pour le vecteur $\mathcal{Y}(t) := (y_1(t), \dot{y}_1(t), z_2^1(t), z_2^{-1}(t))$, on a :
$y_1(t) = B_{y_1}(a, \mathcal{Y}(t))$ si on définit $a(\emptyset) = 1$, $a(\tau) = 0$ si $\tau \in \mathcal{T}_1, s(\tau) = 0$ et $\rho(\tau) \geq 1$.
$z_2^{\pm 1}(t) = B_{z_2^{\pm 1}}(a, \mathcal{Y}(t))$ si on définit $a(\circ^1) = a(\circ^{-1}) = 1$ et $a(\tau) = 0$ si $\tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = \pm 1$ et $\rho(\tau) \geq 1$.

Proposition 4.7 *La solution de (1) peut-être écrite sous la forme $x(t) := y(t) + \sum_{k \neq 0} e^{ik\omega t} z^k(t)$ où $y(t) = B_Y(a, \mathcal{Y}(t)), z^k(t) = B_{Z^k}(a, \mathcal{Y}(t))$. On a $\omega^{-2}\ddot{y}_1(t) = B_{\ddot{y}_1}(b, \mathcal{Y}(t))$ et $\omega^{-1}\dot{z}_2^{\pm 1}(t) = B_{z_2^{\pm 1}}(b, \mathcal{Y}(t))$. De plus, on a les formules de récurrence suivantes pour les valeurs de $a(\tau)$ et de $b(\tau)$:*

$$\begin{aligned}
&b(\tau) = \frac{a''(\tau)}{\rho(\tau)} && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_1, s(\tau) = 0 \\
&2ib(\tau) = a''(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = 1 \\
&-2ib(\tau) = a''(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = -1 \\
&-k^2 a(\tau) = a''(\tau) - 2ik\partial_b a(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_1, s(\tau) = k \\
&a(\tau) = a''(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = 0 \\
&(1-k^2)a(\tau) = a''(\tau) - 2ik\partial_b a(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) && \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = k \quad \text{pour } |k| \geq 2
\end{aligned}$$

Démonstration: Nous avons : $y_1(t) = B_{y_1}(a, \mathcal{Y}(t)), y_2(t) = B_{y_2}(a, \mathcal{Y}(t)), z_j^k(t) = B_{z_j^k}(a, \mathcal{Y}(t)), \omega^{-2}\ddot{y}_1(t) = B_{\ddot{y}_1}(b, \mathcal{Y}(t))$ et $\omega^{-1}\dot{z}_2^{\pm 1} = B_{z_2^{\pm 1}}(b, \mathcal{Y}(t))$.

Le problème (1) étant équivalent à :

$$\begin{cases} \omega^{-2}\ddot{X}_1 = \omega^{-2}g_1(X_1,X_2) \\ \omega^{-2}\ddot{X}_2 + X_2 = \omega^{-2}g_2(X_1,X_2) \end{cases} \tag{17}$$

Donc pour le vecteur $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{pmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{pmatrix} + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1^k \\ \ddot{z}_2^k \end{pmatrix} + \sum_{k\neq 0} 2ik\omega e^{ik\omega t} \begin{pmatrix} \dot{z}_1^k \\ \dot{z}_2^k \end{pmatrix} + \sum_{k\neq 0} (ik\omega)^2 e^{ik\omega t} \begin{pmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{pmatrix}$$

Et donc, en insérant le tout dans (17) et en utilisant les lemmes (4.2) et (4.6), nous obtenons:
Pour la première équation de (17)

$$B_{\ddot{y}_1}(b,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{z_1^k}(\partial_b^2 a,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} 2ike^{ik\omega t} B_{z_1^k}(\partial_b a,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} (ik)^2 e^{ik\omega t} B_{z_1^k}(a,\mathcal{Y}(t)) =$$
$$= B_{y_1}(a'',\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{z_1^k}(a'',\mathcal{Y}(t))$$

D'où :

$$b(\tau) = \frac{a''(\tau)}{\rho(\tau)}$$
$$\partial_b^2 a(\tau) + 2ik\partial_b a(\tau) - k^2 a(\tau) = a''(\tau)$$

Pour la deuxième équation de (17), nous obtenons :

$$B_{y_2}(\partial_b^2 a,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{z_2^k}(\partial_b^2 a,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{\substack{k\neq 0 \\ k\neq \pm 1}} 2ike^{ik\omega t} B_{z_2^k}(\partial_b a,\mathcal{Y}(t)) + 2ie^{i\omega t} B_{z_2^1}(b,\mathcal{Y}(t)) +$$
$$- 2ie^{-i\omega t} B_{z_2^{-1}}(b,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} (ik)^2 e^{ik\omega t} B_{z_2^k}(a,\mathcal{Y}(t)) + B_{y_2}(a,\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{z_2^k}(a,\mathcal{Y}(t)) =$$
$$= B_{y_2}(a'',\mathcal{Y}(t)) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t} B_{z_2^k}(a'',\mathcal{Y}(t))$$

Donc :

$$\partial_b^2 a(\tau) + a(\tau) = a''(\tau)$$
$$\partial_b^2 a(\tau) + 2ik\partial_b a(\tau) - k^2 a(\tau) + a(\tau) = a''(\tau) \qquad \text{si } s(\tau) = k \quad \text{pour } |k| \geq 2$$
$$2ib(\tau) = a''(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) \qquad \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = 1$$
$$-2ib(\tau) = a''(\tau) - \partial_b^2 a(\tau) \qquad \text{si } \tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = -1$$

□

5 Erreur exponentiellement petite

5.1 Quelques majorations

Pour la suite, nous avons besoin d'estimations pour les coefficients de la proposition (4.7).
Lemme 5.1 *Si* $a(\emptyset) = a(\circ^1) = a(\circ^{-1}) = 1, \frac{|a(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq a_\rho$ *pour* $\rho(\tau) = \rho$ *et* $\hat{a}(\zeta) = \sum_{\rho\geq 1} \zeta^\rho a_\rho$ *la fonction génératrice des* a_ρ.
Alors $\frac{|a''(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq a''_\rho$ *où les* a''_ρ *sont défini par* $\sum_\rho a''_\rho \zeta^\rho = \zeta^2 exp(\hat{a}(\zeta))$.

Démonstration: Premièrement, nous utilisons la définition de $a''(\tau)$ et le fait que $\frac{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}{(\rho(\tau_1)+..+\rho(\tau_m))!} \leq \frac{1}{m!}$ pour un arbre $\tau = [[\tau_1,...,\tau_m]_i]$:

$$\frac{|a''(\tau)|}{\rho(\tau)!} = \left|\frac{\rho(\tau)(\rho(\tau)-1)a(\tau_1)\cdot..\cdot a(\tau_m)}{\rho(\tau)!}\cdot\frac{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}\right| = \left|\frac{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}{(\rho(\tau)-2)!}\cdot\frac{a(\tau_1)\cdot..\cdot a(\tau_m)}{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}\right| \leq$$

$$\leq \frac{\rho(\tau_1)!\cdot..\cdot\rho(\tau_m)!}{(\rho(\tau_1)+..+\rho(\tau_m))!}\cdot a_{\rho_1}\cdot..\cdot a_{\rho_m} \leq \frac{1}{m!}\cdot a_{\rho_1}\cdot..\cdot a_{\rho_m}$$

Ensuite on considère la fonction génératrice des $\{a''_\rho\}$, $a''(\zeta) = \zeta^2\cdot e^{\hat{a}(\zeta)}$:

$$a''(\zeta) = \zeta^2\cdot\exp(\zeta a_1+\zeta^2 a_2+...) = \zeta^2\cdot\sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}(\zeta a_1+\zeta^2 a_2+...)^m$$

$$\text{Donc le coefficient de } \zeta^\rho \text{ pour } \rho > 2 \text{ est } a''_\rho = \sum_{m\geq 0}\frac{1}{m!}\sum_{\substack{\rho_1+..+\rho_m=\rho-2\\ \rho_i\geq 1}} a_{\rho_1}\cdot..\cdot a_{\rho_m}\ ,\ a''_2 = 1. \tag{18}$$

Donc $\frac{|a''(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq a''_\rho$ (car $\frac{1}{m!}\cdot a_{\rho_1}\cdot..\cdot a_{\rho_m}$ est un des termes de la somme (18)). □

Lemme 5.2 *Si $b(\tau) = 0$ pour $\rho(\tau) \leq 0$ et $b(\bullet\,) = b([\bullet]_1) = 1$.*
Supposons en plus que :
- $\frac{|b(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq b_\rho$ *pour $\rho(\tau) = \rho$ et $s(\tau) = \pm 1$.*
- $\frac{|b(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq b_\rho$ *pour $\rho(\tau) = \rho+1,\tau\in\mathcal{T}_1$ et $s(\tau) = 0$.*
- $\frac{|c(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq c_\rho$

Où b_ρ et c_ρ sont les coefficients des fonctions génératrices $b(\zeta)$ et $c(\zeta)$.
Alors $\frac{|\partial_b c(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq d_\rho$ où d_ρ est le coefficient de la fonction génératrice $d(\zeta) = c(\zeta)\cdot b(\zeta)$.

Démonstration: Utilisons la définition de $\partial_b c(\tau)$:

$$\frac{|\partial_b c(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq \sum_{u\circ_\gamma v=\tau}\left|\frac{lab(u\circ_\gamma v)}{lab(\tau)}\right|\left|\frac{\rho(\tau)!}{\rho(\tau)!\rho(u)!(\rho(\tau)-\rho(u))!}c(u)b(v)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{S2}\left|\frac{lab(u\circ_\gamma v)}{lab(\tau)}\right|\left|\frac{c(u)}{\rho(u)!}\right|\left|\frac{b(v)}{(\rho(v)-1)!}\right| + \sum_{S1,S3}\left|\frac{lab(u\circ_\gamma v)}{lab(\tau)}\right|\left|\frac{c(u)}{\rho(u)!}\right|\left|\frac{b(v)}{\rho(v)!}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{S2} c_{\rho_1}b_{\rho'_2} + \sum_{S1,S3} c_{\rho_1}b_{\rho_2} = \sum_{\text{splittings}} c_{\rho_1}b_{\rho_2} \leq d_\rho \text{ où } \rho_1 = \rho(u) \text{ et } \rho_2 = \rho(v) \text{ pour les splittings } S_1,S_3,$$

$\rho_1 = \rho(u)$ et $\rho'_2 = \rho(v)$pour le splitting S_2. La dernière inégalité vient du fait que pour toute paire (ρ_1,ρ_2) satisfaisant $\rho_1+\rho_2 = \rho$ pour les splittings 1 et 3 ou $\rho_1+\rho'_2 = \rho+1$ pour le spliting 2, on a que $\sum_{\tau=u\circ_\gamma v} lab(\tau\circ_\gamma v) \leq lab(\tau)$. □

Nous pouvons maintenant majorer les coefficients $b(\tau)$ et $a(\tau)$ de la proposition 4.7.
Lemme 5.3 *Pour les coefficients de la proposition (4.7) il existe des constantes positives μ et ν tel que : $|b(\tau)| \leq \rho(\tau)!\mu\nu^{\rho(\tau)}$ et $|a(\tau)| \leq \rho(\tau)!\mu\nu^{\rho(\tau)}$*

Démonstration: Considérons les fonctions génératrices (définies implicitement) suivantes :

$$b(\zeta) = \frac{\zeta^2}{2} e^{\hat{a}(\zeta)} + \frac{1}{2} b(\zeta)^2 (1 + \hat{a}(\zeta)),\ b(0) = 0$$
$$\hat{a}(\zeta) = \zeta^2 e^{\hat{a}(\zeta)} + (b(\zeta)^2 + 2b(\zeta))(1 + \hat{a}(\zeta)),\ \hat{a}(0) = 0$$

On pose $f(b,a,\zeta) := \begin{pmatrix} b - \frac{\zeta^2}{2} e^{\hat{a}} - \frac{1}{2} b^2 (1 + \hat{a}) \\ \hat{a} - \zeta^2 e^{\hat{a}} - (b^2 + 2b)(1 + \hat{a}) \end{pmatrix}$, on a $f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial f}{\partial (b,a)}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, d'où par le théorème des fonctions implicites $b(\zeta)$ et $\hat{a}(\zeta)$ sont bien défini et analytiques dans un voisinage de $\zeta = 0$.
Donc $b(\zeta) = \sum_{\rho \geq 1} b_\rho \zeta^\rho$ et $\hat{a}(\zeta) = \sum_{\rho \geq 1} \hat{a}_\rho \zeta^\rho$ avec un rayon de convergence supérieur à r. Prenons ν tel que $0 < \frac{1}{\nu} < r$.
De plus, grâce à l'inégalité de Cauchy, on obtient :

$$b_\rho = \frac{b^{(\rho)}(0)}{\rho!} = \frac{1}{\rho!} \frac{\rho!}{2\pi} \int_{\substack{\text{cercle} \\ \text{de rayon} \frac{1}{\nu}}} \frac{b(z)}{(z-0)^{\rho+1}} dz \quad \text{donc si} \quad |b(z)|, |\hat{a}(z)| \leq \mu \ \ \forall \ \ |z| \leq \frac{1}{\nu} \quad \text{on a}$$
$$|b_\rho| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \mu \cdot \nu^{\rho+1} \cdot \frac{2\pi}{\nu} = \mu \cdot \nu^\rho$$

De la même manière $|\hat{a}_\rho| \leq \mu \cdot \nu^\rho$.
Voyons maintenant que $\frac{|b(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq b_\rho$ et que $\frac{|a(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq \hat{a}_\rho$ (ce qui implique le lemme, par la première partie).
Utilisons tout d'abord les résultats de la proposition (4.7) puis les lemmes (5.1) et (5.2) :

- Pour $\tau \in \mathcal{T}_1, s(\tau) = 0$, on a :
$$\frac{|b(\tau)|}{\rho(\tau)!} = \frac{|a''(\tau)|}{\rho(\tau)!\rho(\tau)} \leq \frac{a''_\rho}{2} \leq b_\rho \text{ car } \rho(\tau) \geq 2.(\text{ par récurrence})$$

- Pour $\tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = \pm 1$, on a :
$$\frac{|b(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq \frac{|a''(\tau)|}{2 \cdot \rho(\tau)!} + \frac{\left|\partial_b^2 a(\tau)\right|}{2 \cdot \rho(\tau)!} \leq \frac{a''_\rho}{2} + \frac{1}{2} e_\rho \leq b_\rho \text{ où } e_\rho \text{ est le coefficient de } e(\zeta) = b(\zeta)^2 a(\zeta), a(\zeta) := 1 + \hat{a}(\zeta).$$

- En ce qui concerne $\tau \in \mathcal{T}_1, s(\tau) = k$, on a :
$$\frac{|a(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq \frac{|a''(\tau)|}{k^2 \cdot \rho(\tau)!} + \frac{2}{k} \frac{|\partial_b a(\tau)|}{\rho(\tau)!} + \frac{1}{k^2} \frac{\left|\partial_b^2 a(\tau)\right|}{\rho(\tau)!} \leq a''_\rho + 2d_\rho + e_\rho \leq \hat{a}_\rho \text{ où } d_\rho \text{ est le coefficient de } d(\zeta) = a(\zeta) b(\zeta).$$

- Pour $\tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = 0$, on a :
$$\frac{|a(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq \frac{|a''(\tau)|}{\rho(\tau)!} + \frac{\left|\partial_b^2 a(\tau)\right|}{\rho(\tau)!} \leq a''_\rho + e_\rho \leq \hat{a}_\rho$$

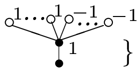
- De la même manière pour $\tau \in \mathcal{T}_2, s(\tau) = k$, $|k| \geq 2$, on a :
$$\frac{|a(\tau)|}{\rho(\tau)!} \leq a''_\rho + e_\rho + 2d_\rho \leq \hat{a}_\rho$$

□

5.2 Le résultat principal

Nous devons d'abord faire face à deux problèmes : premièrement les B-séries considérées ne sont pas convergentes et deuxièmement nous avons une infinité d'arbres pour un ordre $r \geq 1$ fixé.
Réglons d'abord ce dernier point. Supposons que les fonctions $g_i(y_1,y_2)$ (pour $i = 1,2$) soient analytiques sur $B_{2R}(y_0)$ et bornées par une constante M.
Par les inégalités de Cauchy, nous obtenons : $\|\frac{\partial^{n+m}}{\partial y_1^n \partial y_2^m} g_i(y_1,y_2)\| \leq (m+n)! \cdot M \cdot R^{-m-n} \quad \forall\ \|y-y_0\| \leq R$.
Considérons la fonction scalaire $\hat{g}(\eta) := M \cdot \sum_{q\geq 0} \left(\frac{\eta + c_1 + c_{-1}}{R}\right)^q = \frac{M}{1-\frac{\eta}{R}-\frac{c_1+c_{-1}}{R}}$ avec $c_1 + c_{-1} < R$ (pour avoir un rayon de convergence positif).
En dérivant $\hat{g}(\eta)$, nous obtenons $\hat{g}^{(m)}(0) = M \cdot R^{-m} \sum_{q\geq 0}(q+m)\cdot(q+m-1)\cdot .. \cdot (q+1)\left(\frac{c_1+c_{-1}}{R}\right)^q$

Définition 5.4 *Pour un arbre $\hat{\tau}$ sans noeuds $\circ^1$ et $\circ^{-1}$, on définit récursivement l'ensemble $A(\hat{\tau})$:*

$A(\bullet) := \{\bullet\}$, puis $A($*$^1) = \{$*  *$\}$ où l'arbre $\circ^1$ apparait λ_1 fois et l'arbre $\circ^{-1}$ λ_2 fois (i.e si on enlève les arbres $\circ^1$ et $\circ^{-1}$ à $\tau \in A(\hat{\tau})$ on retrouve l'arbre $\hat{\tau}$). On définit cet ensemble de la même manière pour l'arbre* *^{2} . Puis, pour un arbre $\hat{\tau} = [[\hat{\tau}_1,..,\hat{\tau}_m]_i]$:*
$A(\hat{\tau}) := \{\tau | \tau = [[\tau_1,..,\tau_m, \underbrace{\circ^1,..,\circ^1}_{\lambda_1}, \underbrace{\circ^{-1},..\circ^{-1}}_{\lambda_2}]_i]$ et $\tau_i \in A(\hat{\tau}_i)\}$.

Lemme 5.5 *Supposons que $g_i(y_1,y_2)$ (pour $i = 1,2$) soient analytiques , $\|z_2^1\| \leq c_1$, $\|z_2^{-1}\| \leq c_{-1}$ et $\|\dot{y}_1\| \leq \dot{\eta}$ ($\dot{\eta}$ une constante) et soit $\hat{\tau}$ un arbre sans noeuds $\circ^1$ et $\circ^{-1}$, alors*

$$\sum_{\tau\in A(\hat{\tau})} \alpha(\tau)\cdot \|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \alpha(\hat{\tau}) \cdot \hat{G}(\hat{\tau})(0,\dot{\eta}) \qquad \forall\ \|y-y_0\| \leq R$$

où $\hat{G}(\hat{\tau})(0,\dot{\eta})$ est la différentielle élementaire correspondant à $\ddot{\eta} = \hat{g}(\eta), \eta(0) = 0, \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}$ et $A(\hat{\tau}) := \{\tau | \tau = [[\tau_1,..,\tau_m, \underbrace{\circ^1,..,\circ^1}_{\lambda_1}, \underbrace{\circ^{-1},..\circ^{-1}}_{\lambda_2}]_i]\}$,

Démonstration: On remarque, qu' à cause d'éventuelles symmétries dans les arbres, on a

$$\sum_{\tau\in A(\hat{\tau})} \cdot/\cdot = \sum_{\tau_1\in A(\hat{\tau}_1)} \cdot .. \cdot \sum_{\tau_m\in A(\hat{\tau}_m)} \sum_{q\geq 0} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=q} \frac{\mu_1!\mu_2!..}{\nu_1!\nu_2!..}\cdot /\cdot$$

où $\nu_1,\nu_2,..$ comptent le nombre de même arbres dans $\{\hat{\tau}_1,..,\hat{\tau}_m\}$ et $\mu_1,\mu_2,..$ dans $\{\tau_1,..,\tau_m\}$.
Montrons le résultat par récurrence sur $\rho(\hat{\tau})$:
Pour $\rho(\hat{\tau}) = 2$ (p.ex. pour l'arbre ^{1})(on utilisera Cauchy) :

$$\sum_{\rho(\hat{\tau})=2} \alpha(\tau)\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| = \sum_{\lambda_1,\lambda_2\geq 0} \frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!}\|\frac{\partial^{\lambda_1+\lambda_2}}{\partial y_2^{\lambda_1+\lambda_2}} g_1(y_1,0)(z_2^1,..,z_2^1,z_2^{-1},..,z_2^{-1})\| \leq$$

$$\leq \sum_{\lambda_1,\lambda_2\geq 0} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)!}{\lambda_1!\lambda_2!}\cdot M \cdot R^{-\lambda_1-\lambda_2}\cdot c_1^{\lambda_1}\cdot c_{-1}^{\lambda_2} = \sum_{\lambda\geq 0} M\cdot R^{-\lambda}(c_1+c_{-1})^{\lambda} =$$

$$= \frac{M}{1-\frac{c_1+c_{-1}}{R}} = \hat{g}(0) = \hat{G}(\ ^1)(0,\dot{\eta})$$

Où on a posé $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ et utilisé le théorème binomial.
Supposons le lemme vrai jusqu'à $\rho = r-1$ et démontrons le pour les arbres avec $\rho = r$:

Utilisons la remarque du début du lemme ainsi que les définitions de $\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})$ et de $\alpha(\tau)$:

$$\sum_{\tau\in A(\hat\tau)} \alpha(\tau)\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \sum_{\tau_1\in A(\hat\tau_1)} \cdot .. \cdot \sum_{\tau_m\in A(\hat\tau_m)} \sum_{q\geq 0} \sum_{\lambda_1+\lambda_2=q} \frac{\mu_1!\mu_2!..}{\nu_1!\nu_2!..} \cdot \begin{pmatrix} \rho(\tau)-2 \\ \rho(\tau_1),..,\rho(\tau_m) \end{pmatrix} \cdot \frac{\alpha(\tau_1)\cdot .. \cdot \alpha(\tau_m)}{\mu_1!\mu_2!\cdot ..\lambda_1!\lambda_2!} \cdot$$

$$(m+q)!M\cdot R^{-(m+q)}\|\mathcal{F}(\tau_1)(\mathcal{Y})\|\cdot .. \cdot \|\mathcal{F}(\tau_m)(\mathcal{Y})\| \cdot c_1^{\lambda_1}\cdot c_{-1}^{\lambda_2} \leq$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence

$$\leq \begin{pmatrix} \rho(\hat\tau)-2 \\ \rho(\hat\tau_1),..,\rho(\hat\tau_m) \end{pmatrix} \cdot \frac{\alpha(\hat\tau_1)\cdot .. \cdot \alpha(\hat\tau_m)}{\nu_1!\nu_2!..} \cdot \hat G(\hat\tau_1)(0,\dot\eta)\cdot .. \cdot \hat G(\hat\tau_m)(0,\dot\eta) \cdot \sum_{q\geq 0}\sum_{\lambda_1+\lambda_2=q} \frac{c_1^{\lambda_1}\cdot c_{-1}^{\lambda_2}}{\lambda_1!\lambda_2!} \cdot$$

$$\cdot (q+m)!M\cdot R^{-(m+q)} = \begin{pmatrix} \rho(\hat\tau)-2 \\ \rho(\hat\tau_1),..,\rho(\hat\tau_m) \end{pmatrix} \cdot \frac{\alpha(\hat\tau_1)\cdot .. \cdot \alpha(\hat\tau_m)}{\nu_1!\nu_2!..} \cdot \hat G(\hat\tau_1)(0,\dot\eta)\cdot .. \cdot \hat G(\hat\tau_m)(0,\dot\eta)\cdot M\cdot R^{-m}$$

$$\sum_{q\geq 0}\sum_{\lambda_1+\lambda_2=q} \frac{c_1^{\lambda_1}\cdot c_{-1}^{\lambda_2}}{\lambda_1!\lambda_2!}(q+m)\cdot(q+m-1)\cdot .. \cdot (q+1)q!R^{-q} = ...M\cdot R^{-m}\sum_{q\geq 0}(\frac{c_1+c_{-1}}{R})^q(q+m)\cdot .. \cdot (q+1) =$$

$$= \alpha(\hat\tau)\hat g^{(m)}(0)\hat G(\hat\tau_1)(0,\dot\eta)\cdot .. \cdot \hat G(\hat\tau_m)(0,\dot\eta) = \alpha(\hat\tau)\hat G(\hat\tau)(0,\dot\eta)$$

□

Remarque:

- En posant $\sigma(\tau) := 1+|s(\tau)|$ et en utilisant $\sigma(\tau)\leq \sigma(\tau_1)\cdot .. \cdot \sigma(\tau_m)(\lambda_1+\lambda_2+1)$ (car $\sigma(\tau_1)\cdot .. \cdot \sigma(\tau_m)(\lambda_1+\lambda_2+1) \geq 1+|s(\tau_1)|+..+|s(\tau_m)|+\lambda_1+\lambda_2+\underbrace{...}_{\geq 0} \geq 1+|s(\tau)| = \sigma(\tau)$)

  on montre de la même manière qu'au lemme 5.5. :

  1)
  $$\sum_{\tau\in A(\hat\tau)} \alpha(\tau)\,|s(\tau)|\,\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \sum_{\tau\in A(\hat\tau)} \alpha(\tau)\sigma(\tau)\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \alpha(\hat\tau)H(\hat\tau)(0,\dot\eta)$$

  avec H la différentielle élémentaire de $\ddot\eta = h(\eta), \eta(0)=0, \dot\eta(0)=\dot\eta$ et $h(\eta) := \sum_{m\geq 0}\frac{h^{(m)}(0)}{m!}\eta^m$
  où $h^{(m)}(0) = M\cdot R^{-m}\sum_{q\geq 0}(q+m)(q+m-1)\cdot .. \cdot (q+1)(q+1)(\frac{c_1+c_{-1}}{R})^q$

  2)
  $$\sum_{\tau\in A(\hat\tau)} \alpha(\tau)\,|s(\tau)|^2\,\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \sum_{\tau\in A(\hat\tau)} \alpha(\tau)\sigma(\tau)^2\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \alpha(\hat\tau)\tilde H(\hat\tau)(0,\dot\eta)$$

  avec $\tilde H$ la différentielle élémentaire de $\ddot\eta = \tilde h(\eta), \eta(0)=0, \dot\eta(0)=\dot\eta$ et $\tilde h(\eta) := \sum_{m\geq 0}\frac{\tilde h^{(m)}(0)}{m!}\eta^m$
  où $\tilde h^{(m)}(0) = M\cdot R^{-m}\sum_{q\geq 0}(q+m)(q+m-1)\cdot .. \cdot (q+1)(q+1)^2(\frac{c_1+c_{-1}}{R})^q$

- En utilisant à nouveau les inégalités de Cauchy et le lemme 5.5. :

  $$\sum_{\rho(\tau)=N} \alpha(\tau)\|\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y})\| \leq \sum_{\tau\in A(\hat\tau),\rho(\hat\tau)=N} \alpha(\hat\tau)\hat G(\hat\tau)(0,\dot\eta) = \eta^{(N)}(0) \leq N!\hat M\hat R^{-N}$$

  Avec η solution exacte de $\ddot\eta = \hat g(\eta), \eta(0)=0, \dot\eta(0)=\dot\eta$ (η est analytique car $\hat g$ l'est).
  Idem pour $\sum s(\tau)\alpha(\tau)...$ et $\sum s(\tau)^2\alpha(\tau)...$ mais avec d'autre constantes.
  On supposera, pour ne pas s'encombrer de nombreuses constantes, que $\hat M$ et $\hat R$ donnent la plus grande des majorations.

On a les majorations suivantes (grâce aux lemmes (5.3) et (5.5)):

$$\left\| \sum_{\tau,\rho(\tau)=j} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)b(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \right\| \leq \frac{\omega^{-j}}{j!} j!\mu\nu^j j!\hat{M}\hat{R}^{-j} \leq \omega^{-j}\mu\nu^j j!\hat{M}\hat{R}^{-j}$$

De même en remplaçant $b(\tau)$ par $a(\tau)$,$a(\tau)\cdot s(\tau)$ et $a(\tau)\cdot s(\tau)^2$ dans l'expression du haut.
Il faut maintenant tronqué ces B-séries, mais où ? En suivant une idée de [3], nous tronquons les séries où le terme est minimal.
Comme $j! \approx j^j$ on a $\left(\frac{\nu j}{\omega \hat{R}}\right)^j \approx e^{j \ln\left(\frac{\nu j}{\omega \hat{R}}\right)}$ donc le minimum est atteint quand $\frac{\partial}{\partial j} e^{j \ln\left(\frac{\nu j}{\omega \hat{R}}\right)} = 0 \Leftrightarrow$ $\ln\left(\frac{\nu j}{\omega \hat{R}}\right) + j\frac{\omega \hat{R}}{\nu j}\cdot\frac{\nu}{\omega \hat{R}} = 0 \Leftrightarrow j = \frac{\omega \hat{R}}{\nu e}$.
Donc on tronque à l'indice N où N est le plus grand entier tel que $\frac{N}{\omega} \leq \frac{\hat{R}}{e\nu}$.
Par suite, il vient :

$$\left\| \sum_{j=2}^{N} \sum_{\rho(\tau)=j} \frac{\omega^{-\rho(\tau)}}{\rho(\tau)!}\alpha(\tau)b(\tau)\mathcal{F}(\tau)(\mathcal{Y}) \right\| \leq \sum_{j=2}^{N} \mu\hat{M}j!\left(\frac{\nu}{\omega\hat{R}}\right)^j \underset{j!\leq j^j}{\underset{\uparrow}{\leq}} \mu\hat{M}\left(\frac{\nu}{\omega\hat{R}}\right)^2 \sum_{j=0}^{N-2}\left(\frac{\nu(j+2)}{\omega\hat{R}}\right)^j \leq$$

$$\underset{j\leq N}{\underset{\uparrow}{\leq}} \mu\hat{M}\left(\frac{\nu}{\omega\hat{R}}\right)^2 \underbrace{\sum_{j\geq 0}\left(\frac{\nu\cdot N}{\omega\hat{R}}\right)^j}_{\leq 2(\text{série géom.})} \leq \frac{1}{\omega^2}\mu\hat{M}\left(\frac{\nu}{\hat{R}}\right)^2\cdot 2 =: \frac{C}{\omega^2}$$

Avec des majorations similaires pour $b(\tau)$ remplacé par $a(\tau)$,$a(\tau)\cdot s(\tau)$ et $a(\tau)\cdot s(\tau)^2$, on obtient $\omega^{-2}\left|\ddot{y}_1\right| + \left|y_2\right| + \omega^{-1}\left|\dot{z}_2\right| + \left|z_1\right| + \sum_{k\geq 2}\left|z^k\right| \leq \frac{C}{\omega^2} \quad \forall t$.
Ou encore, $x(t) := y(t) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t}z^k(t)$ est bien définit et uniformément convergent pour t fixé.
Insérons $x(t) := y(t) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t}z^k(t)$ dans l'équation de départ (1) et posons
$F(t,\omega^{-1}) := \ddot{x}(t) + \Omega^2\cdot x(t) - g(x(t))$. F est analytique en ω^{-1} (car $x(t)$ et g le sont), de plus $F(t,\omega^{-1}) = \mathcal{O}(\omega^{-N-1})$ par définition des B-séries de y et z^k.
Comme $\omega^{N+1}F(t,\omega^{-1})$ est analytique pour $\left|\omega^{-1}\right| \leq \varepsilon$ (ε à détérminer), on a , par le principe du maximum :

$$\|\omega^{N+1}F(t,\omega^{-1})\| \leq \frac{1}{\varepsilon^{N+1}} \max_{|\omega^{-1}|=\varepsilon} \left\|F(t,\omega^{-1})\right\|$$

Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{\hat{R}}{\nu N}$, en effet :
Nous devons vérifier que $\|x(t) - x(0)\| \leq 2R$ pour t petit :

$$\|x(t) - x(0)\| \leq \|y(t) - y(0)\| + \sum_{k\neq 0}\|z^k(t) - z^k(0)\| \underset{(*)}{\leq} t(c/\omega + \dot{\eta}) + Mt^2/2 + c/\omega^2 \leq 2R$$

Si t suffisament petit et ω grand. Pour montrer (*), on utilise :

- $\|z_2(t) - z_2(0)\| \leq \int_0^t \|\dot{z}_2(s)\|ds \leq t\cdot C/\omega$
- $\|y_1(t) - y_1(0)\| \leq t\cdot\|\dot{y}_1(0)\| + \int_0^t (t-s) \underbrace{\|\ddot{y}_1(s)\|}_{g_1(y_1,0)+..\leq M} ds \leq t\dot{\eta} + M\cdot t^2/2$
- Les autres termes sont bornés par C/ω^2.

Il reste à borner $\left\|F(t,\omega^{-1})\right\|$ sur $\left|\omega^{-1}\right| = \varepsilon$, ceci fera l'objet du dernier théorème:
Théorème 5.6 *Sous les hypothèses du lemme (5.5.), on a:*

$$\left\|F(t,\omega^{-1})\right\| \leq e^{-\omega/\omega^*} \cdot (M + 7 \cdot C)$$

où $\omega^* := \frac{\nu e}{\hat{R}}$, *M une borne de* $g(y)$ *et* $C = \mu \hat{M} \left(\frac{\nu}{\hat{R}}\right)^2$.
Démonstration: Majorons tout d'abord le terme $\left\|\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t)\right\|$:

$$\left\|\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t)\right\| = \left\|\ddot{y}(t) + \Omega^2 y(t) + \sum_{k\neq 0} e^{ik\omega t}(\ddot{z}^k(t) + 2ik\omega\dot{z}^k(t) - k^2\omega^2 z^k(t) + \Omega^2 z^k(t))\right\| \leq 7{\cdot}C \qquad \text{en effet:}$$

On utilise:

- Grâce aux lemmes (4.6.) et (5.5.) et au fait que $|k| = s(\tau) \leq \sigma(\tau)$

$$z^k(t) = B_{z^k}(a,\mathcal{Y}(t)) \Rightarrow \omega^{-1}\dot{z}^k(t) = B_{z^k}(\partial_b a,\mathcal{Y}(t)) \Rightarrow \left\|\sum_{|k|\geq 2} 2\,|k|\,\omega\dot{z}^k(t)\right\| \leq \omega^2 \cdot \frac{C}{\omega^2} \cdot 2 = 2 \cdot C$$

- De même

$$\omega^{-2}\ddot{z}^k(t) = B_{z^k}(\partial_b^2 a,\mathcal{Y}(t)) \Rightarrow \left\|\sum_{|k|\geq 2} \ddot{z}^k(t)\right\| \leq \omega^2 \cdot \frac{C}{\omega^2} = C$$

- Comme $k^2 \leq \sigma(\tau)^2$ et par le lemme (5.5.), on a:

$$\left\|\sum_{|k|\geq 2} k^2\omega^2 z_1^k(t)\right\| \leq \omega^2 \frac{C}{\omega^2} = C$$

- Du fait que les $\omega^2 z_2^{\pm 1}$ s'éliminent avec les $-k^2\omega^2 z^k$ pour $k = \pm 1$, nous obtenons:

$$\left\|\sum_{|k|\geq 2} \omega^2 z_2^k(t)\right\| \leq \omega^2 \frac{C}{\omega^2} = C$$

- De nouveau par le calcul qui suit le lemme (5.5.):

$$\|\ddot{y}_1(t)\| \leq \omega^2 \frac{C}{\omega^2} = C$$

- Par les lemmes (4.6) et (5.4):

$$\left\|\omega^{-2}\ddot{y}_2(t)\right\| = \left\|B_{y_2}(\partial_b^2 a,\mathcal{Y}(t))\right\| \leq \frac{C}{\omega^2} \Rightarrow \|\ddot{y}_2(t)\| \leq C$$

- Gardons le plus facile pour la fin:

$$\left\|\Omega^2 y(t)\right\| \leq C$$

Reste à majorer $\|g(x)\|$ ... mais comme nous n'avons pas oublié que cette fonction était bornée par la constante M, nous obtenons :

$$\|\omega^{N+1}F(t,\omega^{-1})\| \le \frac{1}{\varepsilon^{N+1}}(M+7\cdot C) \Rightarrow \|F(t,\omega^{-1})\| \le \left(\frac{\nu N}{\hat{R}\omega}\right)^{N+1}(M+7\cdot C) \le \left(\frac{\nu \hat{R}}{\hat{R}e\nu}\right)^{N+1}(M+7\cdot C)$$

$$\le e^{-N}\cdot\left(\frac{M+7\cdot C}{e}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ N/\omega \le 1/\omega^* \Rightarrow N \le \omega/\omega^* \le N+1 \\ \Rightarrow -N \le -\omega/\omega^* + 1}}{\le} e^{-\omega/\omega^*}e^{1}\left(\frac{M+7\cdot C}{e^{1}}\right) = e^{-\omega/\omega^*}(M+7\cdot C)$$

□

En résumé, l'erreur faite après tronquation des séries est exponentiellement petite.

Remarque: On pourrait utiliser certains résultats de ce papier pour montrer la conservation de l'énergie, ainsi que de l'énergie oscillatoire, pour le problème (1) sur de longs intervalles..................*to be continued*

Remerciements : THE MASTER: E.Hairer and his DISCIPLES: P.Leone, S.Cirilli, A."Ronaldo"Abdulle. A.Henriques et R.Stancu.
Latex master's: F.Berto et C.Wuthrich (merci pour les nom d'arbres!).
Sans oublier de remercier ceux que j'aurais oubliés! (Bartho's bros., Mr. G p.ex.)

Références :

[1] Hairer, E., Lubich, Ch. (1999): Long-time energy conservation of numerical methods for oscillatory differential equations. To appear in SIAM J. Numer. Anal.

[2] Hairer, E. (1999): Backward error analysis for multistep methods. Numer. Math. 84, p.199-232

[3] Hairer, E. (1998): Numerical geometric integration (2 h. cours, 1 h. ex.).

[4] Haarmann F. (1981): Promenade des Bastions : guide dendrologique.