Serie 1

zur 9. KW (23.02. - 01.03.2009)

Aufgabe 1: *

Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom zu den folgenden Stützpunkten:

j	0	1	2	3
x_j	0	0.5	1	1.5
y_j	1	2	3	4

Hinweis: Die Lösung ist ein Polynom vom Grad eins.

Aufgabe 2: (P)

Zum Plotten der Lagrange-Polynome zu den Stützstellen `X(i)` schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `function [L, x_plot] = LagrangePlot(X)`. Testen Sie Ihre Implementation mit den Daten aus Aufgabe 1.

Hinweis: Die Struktur der `MATLAB`-Routine könnte z.B. so aussehen:

```
function [L, x_plot] = LagrangePlot(X)
n = length(X);
x_plot = linspace(X(1), X(end), 100*n);
L = ones(n, length(x_plot));
for i = 1 : n % Das i-te Lagrange-Polynom
    for j = 1 :n
        if (i ~= j)
            L(i, :) = ... ;
        end
    end
    figure(i)
    plot(x_plot, L(i, :))
    xlabel('x')
    title(['Das ' num2str(i) '. Lagrange-Polynom'])
end
```

Aufgabe 3: *

Berechnen Sie das Interpolationspolynom p durch die drei Punkte $(x_0, y_0) = (0, 2)$, $(x_1, y_1) = (2, 3)$ und $(x_2, y_2) = (3, 8)$:

(a) $p(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2} a_j x^j$ (monomiale Darstellung);

(b) $p(x) = \sum_{j=0}^{2} b_j l_j(x)$ mit $l_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$ (Lagrange-Darstellung);

(c) $p(x) = \sum_{j=0}^{2} c_j \omega_j(x)$ mit $\omega_j(x) = \prod_{i<j} (x - x_i)$ (Newton-Darstellung).

Verifizieren Sie, dass das Polynom in allen Fällen dasselbe ist.

Aufgabe 4: (P)*

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Routine
`function interpol_wert = Newton_Interpol(X, Y, x)`, die mit der Newtonschen Interpolationsformel zu den Stützpunkten `(X(i), Y(i))` den interpolierten Wert `interpol_wert` an einer beliebigen Stelle `x` berechnet.
Hinweis: Die Struktur der MATLAB*-Routine könnte z.B. so aussehen:*

```
function interpol_wert = Newton_Interpol(X, Y, x)
n = length(X)-1;   % Grad des Interpolationspolynoms
div_Diff = Y;      % div_Diff: dividierte Differenzen
for k = 2 : n+1
    for i = n+1 : -1 : k
        div_Diff(i) = ... ;
    end
end
% Auswertung des Interpolationspolynoms
interpol_wert = div_Diff(n+1);
for k = n : -1 : 1
    interpol_wert = ... ;
end
```

(b) Mit Hilfe der Funktion `Newton_Interpol` berechnen Sie den interpolierten Wert $p(x)$ bei $x = 57.5$ zu der folgenden Wertetabelle für die Funktion $\log_{10}$:

j	0	1	2	3
X_j	56	57	58	59
Y_j	1.748188	1.755875	1.763428	1.770852

Vergleichen Sie den interpolierten mit dem exakten Wert bei $x = 57.5$. Zeichnen Sie $p(x)$ und $\log_{10}(x)$, zuerst für $x \in [56, 59]$ und dann für $x \in [1, 150]$. Zeichnen Sie auch die Fehlerfunktion $r(x) = \log_{10}(x) - p(x)$ für $x \in [56, 59]$.

Aufgabe 5: (A+B)

Seien L_i, $i = 0, 1, \dots, n$ die Lagrangeschen Polynome zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$). Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{P}_n = \{p \text{ Polynom} \mid \text{Grad } p \leq n\}$ bilden.

Aufgabe 6: (A+B)*

Durch Induktion zeigen Sie, dass

$$\delta^n y[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i}\,.$$

Danach zeigen Sie, dass die dividierten Differenzen $\delta^n y[x_0, \ldots, x_n]$ symmetrisch sind, d.h.

$$\delta^n y[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = \delta^n y[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

für jede beliebige Permutation σ von $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Abgabe: Dienstag, 24. Februar 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`