Serie 2

zur 11. KW (09.03. - 15.03.2009)

Aufgabe 1: *

Gegeben seien die Funktion

$$f(x) = \frac{4}{3+2x}$$

und die Stützstellen $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1, -0.5, 0.5, 1)$.

(a) Auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$ berechnen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom $p(x)$ zu $f(x)$ bezüglich der gegebenen Stützstellen.

(b) Zeigen Sie, die folgende Fehlerabschätzung

$$\max_{x\in[-1,1]} |p(x) - f(x)| \leq 16\,.$$

Aufgabe 2: *

Sei $f(x) = \sin(\pi x/2)$ und $p(x)$ das Interpolationspolynom 2. Grades, das mit $f(x)$ an den Stellen $x = 0, 1, 2$ übereinstimmt.

(a) Bestimmen Sie die Fehlerschranke für $|f(x) - p(x)|$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$.

(b) (P) Vergleichen Sie die Fehlerschranke mit dem tatsächlichen Fehler $r(x) = |f(x) - p(x)|$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$.
Hinweis: *Verwenden Sie die* `MATLAB`*-Routine* `Newton_Interpol` *(siehe Aufgabe 4, Serie 1) um die interpolierten Werte auf dem Intervall* $[0,2]$ *zu berechnen. Zeichnen Sie die Fehlerschranke und den tatsächlichen Fehler zusammen.*

Aufgabe 3: (P)* (**Beispiel von Runge**)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ für $x \in [-5, 5]$.

(a) Zur Berechnung der Interpolationspolynome n-ten Grades zu den Daten $(x_j^{(n)}, f(x_j^{(n)}))$ mit den äquidistanten Stützstellen

$$\left\{ x_j^{(n)} := -5 + j\,\frac{10}{n} \right\}_{j=0,1,\dots,n}$$

schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `RungeBeispiel`. Für $n = 5, 10, 20$ stellen Sie die Interpolationspolynome zusammen mit f graphisch dar und berechnen Sie den maximalen Fehler jedes Interpolationspolynoms.

(b) Um die Funktion $f(x)$ besser zu approximieren, modifizieren Sie Ihre Routine `RungeBeispiel`, so dass Sie die Tschebyscheff-Stützstellen

$$\left\{ x_j^{(n)} := 5\cos\left(\frac{2j+1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right\}_{j=0,1,\ldots,n}$$

verwenden. Dann wiederholen Sie die Teilaufgabe (a).

<u>*Hinweis:*</u> *Die Struktur der* `MATLAB`*-Routine könnte z.B. so aussehen:*

```
clear all
n = [5 10 20];
for k = 1 : length(n)
    j = 0 : n(k);

    X = ... ; % aequidistante Stuetzstellen
    Y = ... ; % Stuetzwerte

    X_T = ... ; % Tschebyscheff-Stuetzstellen
    Y_T = ... ; % Stuetzwerte

    x_plot = -5:0.01:5;
    y_plot = ... ;

    interpol_equidistant = Newton_Interpol(..., ..., ...);
    interpol_tschebyscheff = Newton_Interpol(..., ..., ...);

    figure(k)
    subplot(2, 1, 1)
    plot(x_plot, ..., '--', x_plot, y_plot, '-')
    legend('p(x)', 'f(x)')
    title(['n=' num2str(n(k)) ' und aequidistante Stuetzstellen'])

    subplot(2, 1, 2)
    plot(x_plot, ..., '--', x_plot, y_plot, '-')
    legend('p(x)', 'f(x)')
    title(['n=' num2str(n(k)) ' und Tschebyscheff-Stuetzstellen'])

    max_error(k) = ...   % mit den aequidistanten Stuetzstellen
    max_error_T(k) = ... % mit den Tschebyscheff-Stuetzstellen
end
```

<u>Aufgabe 4:</u> (P)

Die Funktion $f(x) = x^{1.7} + 0.1e^{3x}\sin(13x)$ soll auf dem Intervall $[0, 0.8]$ stückweise interpoliert werden. Das Intervall wird dazu in vier Teilintervalle der Länge 0.2 aufgeteilt.

(a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function z = LinInterpol(x0, x1, x)`, die den Wert der linearen Funktion durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$ an der Stelle x ausgibt.

(b) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `function z = QuadInterpol(x0, x2, x)`, die den Wert der quadratischen Funktion durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$, $((x_0 + x_2)/2, f((x_0 + x_2)/2))$ und $(x_2, f(x_2))$ an der Stelle x ausgibt.

Laden Sie die Datei `main.m` von der Webseite herunter und zeichnen Sie damit die Funktion $f(x)$ und die Interpolationen aus (a) und (b) in zwei verschiedene Bilder.

Hinweis: Schreiben Sie eine `MATLAB`*-Funktion* `function y = f(x)`*, die $f(x)$ an der Stelle x auswertet. Zur Implementation von* `LinInterpol` *und* `QuadInterpol` *könnten Sie Ihre Routine* `Newton_Interpol` *verwenden.*

Aufgabe 5: (A+B)*

Zu den drei Stützpunkten $(x_j, |x_j|)$ für $j = 0, 1, 2$ mit den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = \eta$ $(0 \le \eta < 1)$, $x_2 = 1$ bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom $p_\eta(x)$, so dass der Fehler $\max\limits_{x \in [-1,1]} ||x| - p_\eta(x)|$ minimal ist.

Hinweis: Zuerst zeigen Sie, dass $p_\eta(x) = \dfrac{x^2 + \eta}{\eta + 1}$. Dann untersuchen Sie die Fehlerfunktion $r(x) = ||x| - p_\eta(x)|$ für $x \in [-1, 1]$.

Aufgabe 6: (A+B)

Gegeben seien $n + 1$ paarweise verschiedene Stützstellen $x_0, x_1, \dots, x_n$ und die Funktion $f(x) = x^n$. Zeigen Sie:

(a) $\delta^n f[x_0, x_1, \dots, x_n] = 1$.

(b) $\delta^{n-1} f[x_1, x_2, \dots, x_n] = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.
Hinweis: Betrachten Sie

$$\omega(x) := (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) = x^n + x^{n-1}(x_1 + \dots + x_n) + \dots$$

und zeigen Sie, dass

$$\delta^{n-1}\omega[x_1, \dots, x_n] = \delta^{n-1} f[x_1, \dots, x_n] - \delta^{n-1} x^{n-1}[x_1, \dots, x_n](x_1 + \dots + x_n)\,.$$

Dann verwenden Sie die Teilaufgabe (a).

Abgabe: Dienstag, 10. März 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`