Serie 3

zur 12. KW (16.03. - 22.03.2009)

Aufgabe 1: *

Auf dem Intervall $[-2, 1]$ sei die Funktion $f(x) = x^2|x|$ gegeben. Ist $f(x)$ bzgl. der folgenden Stützstellen ein kubischer Spline?

(a) $(x_0, x_1, x_2) = (-2, 0, 1)$.

(b) $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-2, -1, 0, 1)$.

(c) $(x_0, x_1, x_2) = (-2, -1, 1)$.

Aufgabe 2: *

Gegeben seien die Stützpunkte $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, -1)$ und $(3, 0)$. Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für den natürlichen interpolierenden Spline s zu diesen Daten. Berechnen Sie $s(0.5)$.

Aufgabe 3: (P)*

Gegeben seien die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ auf dem Intervall $[-5, 5]$ und die Stützstellen $\left\{ x_j^{(n)} := -5 + j\dfrac{10}{n} \right\}_{j=0,1,\ldots,n}$. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `SplineNewton` zur Interpolation von $f(x)$ durch einen eingespannten Spline zu den Daten $(x_j^{(12)}, f(x_j^{(12)}))$ sowie durch ein Newton-Interpolationspolynom 12-ten Grades. Stellen Sie die beiden Interpolationen zusammen mit den Stützstellen graphisch dar.

Hinweis: *Zur Spline-Interpolation verwenden Sie den* `MATLAB`*-Befehl* `spline` *mit* `size(X) = size(Y)`*. Zur Newton-Interpolation verwenden Sie Ihre* `MATLAB`*-Routine* `Newton_Interpol` *(siehe Aufgabe 4, Serie 1).*

Bemerkung: In `MATLAB` kann der eingespannte interpolierende kubische Spline mit Hilfe des Komandos `YY = spline(X, Y, XX)` berechnet werden. Dazu enthält der Vektor `X` die Stützstellen, der Vektor `Y` die zu interpolierenden Funktionswerte sowie als erstes und letztes Element die Steigungen $f'(x_0)$ und $f'(x_n)$, und `XX` die zu berechnenden Abzissen. Die zum Vektor `XX` gehörigen Werte der Splineapproximation stehen dann im Ausgabevektor `YY`. In dieser Variante des `spline`-Befehls gilt also `size(Y) = size(X) + 2`. Sind die Längen der Vektoren `X` und `Y` gleich, so werden die zwei erforderlichen Zusatzbedingungen für die Eindeutigkeit des interpolierenden kubischen Splines aus der Forderung bestimmt, dass die dritten Ableitungen des Splines in den Knoten x_1 und x_{n-1} stetig sind.

Aufgabe 4: (P) (**Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung**)

Zu einer gegebenen Folge von Punkten (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, in der Ebene soll eine interpolierende glatte Kurve $(x(t), y(t))$ durch diese Punkte konstruiert werden. Der Kurvenparameter t wird durch die Distanzen zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten festgelegt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_k &= t_{k-1} + \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Man bestimmt zwei eingespannte Splines s_x und s_y durch die Stützpunkte (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k). Um die interpolierende Kurve $(x(t), y(t))$ darzustellen, zeichnet man dann s_x gegen s_y.

(a) Laden Sie die Datei `Points.dat` von der Webseite herunter, die eine Punktfolge (x_k, y_k) beschreibt. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `PlotKurveSpline` zum Zeichnen der interpolierenden glatten Kurve durch diese Punkte. Ein Skelett des Codes `PlotKurveSpline.m` kann man von der Webseite herunterladen.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `PlotSurprise` zum Zeichnen der Überaschung, die wir vorbereiten haben. Das Überaschungsbild besteht aus den interpolierenden glatten Kurven durch die Punkte, die in der Datei `PointsSurprise.dat` beschrieben ist. Die Anzahl der Punkte, dir durch eine Kurve interpoliert werden sollen, ist in der Datei `NPointsSurprise.dat` gegeben, d.h. `NPointsSurprise(i)` ist die Anzahl der Punkte, welche durch die `i`-te Kurve interpoliert werden. Ein Skelett des Codes `PlotSurprise.m` kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 5: (A+B)*

Mit Hilfe der Formel von Newton soll das Polynom vom Grad 3 $s_i(x)$ bestimmt werden, das für gegebene Werte y_{i-1}, y_i, p_{i-1}, $p_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

$$s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}\,, \quad s_i(x_i) = y_i\,, \quad s_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}\,, \quad s_i'(x_i) = p_i$$

erfüllt.

Hinweis: Ersetzen Sie die Bedingungen $s_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}$ und $s_i'(x_i) = p_i$ durch $s_i(x_{i-1} + \varepsilon) = y_{i-1} + \varepsilon p_{i-1}$ und $s_i(x_i - \varepsilon) = y_i - \varepsilon p_i$. Dann berechnen Sie das Schema der dividierten Differenzen und lassen Sie $\varepsilon \to 0$ um

$$\begin{aligned} s_i(x) &= y_{i-1} + (x - x_{i-1})\delta y[x_i, x_{i-1}] \\ &\quad + \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_{i-1}^2} \{(p_i - \delta y[x_i, x_{i-1}])(x - x_{i-1}) + (p_{i-1} - \delta y[x_i, x_{i-1}])(x - x_i)\} \end{aligned}$$

mit $h_{i-1} := x_i - x_{i-1}$ zu berechnen.

Aufgabe 6: (A+B)

Sei A eine $n \times n$ reelle strikt diagonal dominante Matrix. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

Hinweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ der Index, für welchen $|x_k| = \max_j |x_j|$ gilt. Folgern Sie aus der k-ten Gleichung des Gleichungssystems $Ax = 0$, dass $x \neq 0$ und die Voraussetzung an A zu einem Widerspruch führt.

Aufgabe 7: (A+B)*

Für Funktionen $v \in \mathcal{C}^2([a,b])$ definieren wir $J[v] = \int_a^b (v''(x))^2 \, dx$. Betrachten Sie den natürlichen interpolierenden Spline s durch die Stützpunkte (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, mit $y_k = f(x_k)$, wobei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie, dass $J[s] \leq J[f]$.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\int_a^b s''(x)(f''(x) - s''(x)) \, dx = 0$ und benutzen Sie dann die Formel $u^2 - v^2 = (u-v)^2 + 2v(u-v)$.

Abgabe: Dienstag, 17. März 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`