Serie 4

zur 13. KW (23.03. - 29.03.2009)

Aufgabe 1: *

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\left| f'(x) - \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \right| \leq Ch^2, \quad 0 < h \leq h_0$$

und bestimmen Sie C.

Aufgabe 2: (P)*

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `MeineSumme` zur Berechnung die Summe

$$s := 100 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{10000}$$

auf zwei Arten:

a) von links nach rechts
b) von rechts nach links.

Erklären Sie den Unterschied nach der elften Dezimalstelle und vergleichen Sie mit dem exakten Resultat

$$s = 99.69309718305994529172.$$

Hinweis: Der Befehl `format long` *bewirkt, dass alle Dezimalstellen angezeigt werden.*

Aufgabe 3: (P)

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `ApproxAbleitung` um die 1. Ableitung von $\ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 10$ mit Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 60$ mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten zu berechnen (Siehe der Satz 2 aus der Vorlesung). Zeichnen Sie den Fehler bezüglich h_i auf einer `log-log`-Skala.

Vergleichen Sie den experimentell bestimmten Wert h_{min}, für den der Fehler minimal ist, mit der theoretischen Voraussage

$$h^*_{min} \simeq 2 \left(\frac{3\, eps\, |f(x_0)|}{|f'''(x_0)|} \right)^{1/3}.$$

Hinweis: Ein Skelett des Codes `ApproxAbleitung.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

Aufgabe 4: (A+B)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq Ch^2, \quad h \leq h_0$$

und bestimmen Sie C.

Aufgabe 5: (A+B)

Sei $p_n(x)$ das Interpolationspolynom n-ten Grades durch die äquidistanten Stützpunkte (x_k, y_k), $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d^n p_n}{dx^n}(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} y_i.$$

Hierbei ist

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad 0! = 1.$$

Hinweis: Beweisen Sie zuerst mit der Lagrangeschen Interpolationsformel, dass

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j), \quad \lambda_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x_i - x_j)}, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Zeigen Sie dann, dass

$$\lambda_i = \frac{(-1)^{n-i}}{n!} \binom{n}{i} \frac{1}{h^n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

und differenzieren Sie (1) n-mal nach x.

Aufgabe 6: (A+B)

Die Differenz von zwei Quadraten kann auf die beiden Weisen

$$a \cdot a - b \cdot b = (a+b)(a-b)\,, \quad a\,, b \in \mathbb{R}\,,$$

ausgewertet werden, welche jeweils drei Operationen erfordern.

(a) Bestimmen Sie für beide Varianten der Formel die zu erwartenden Rundungsfehler bei exakter Eingabe $a, b \in \mathbb{R}$, wobei Produkte der Größenordnung ε^2 vernachlässigt werden.

(b) Werten Sie beide Formeln aus mit den Werten $a = 31.7$, $b = 31.6$ bei dezimaler Gleitpunktrechnung mit drei Stellen.

Abgabe: Dienstag, 24. März 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`