Serie 5

zur 14. KW (30.03. - 05.04.2009)

Aufgabe 1:

Sei durch (ξ_i, ω_i), $i = 1, \dots, n$, eine Quadraturformel $Q[f]$ mit $\omega_i > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften gelten:

i) Linearität:

$$Q[f+g] = Q[f] + Q[g]\,,$$
$$Q[cf] = c\,Q[f], \quad \forall c \in \mathbb{R}\,.$$

ii) Positivität:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad Q[f] \geq 0\,.$$

Aufgabe 2: *

(a) Zeigen Sie, dass die 3/8-Regel mit Knoten $(0, 1/3, 2/3, 1)$ und Gewichten $(1/8, 3/8, 3/8, 1/8)$ Ordnung 4 hat.

(b) Approximieren Sie das Integral $\int_2^3 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ mit der summierten 3/8-Regel mit äquidistanter Maschenweite $h = 0.5$. Vergleichen Sie anschliessend mit dem exakten Wert.

Aufgabe 3: (P)*

Schreiben Sie `MATLAB`-Routinen `function Int = Quad_SumMPunkt(f, a, b, h)` und `function Int = Quad_SumTrapez(f, a, b, h)`, die numerische Approximationen des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit der summierten Mittelpunktregel bzw. mit der summierten Trapezregel und Schrittweite h berechnen.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `MeinTest` zur Berechnung einer numerischen Approximation des Integrals $\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ zuerst mit der summierten Mittelpunktregel und dann mit der summierten Trapezregel für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 16$. Zeichnen Sie die absoluten Fehler und bestimmen Sie die Konvergenzordnungen.

Hinweis: Definieren Sie die Funktion `f` *mit dem* `MATLAB`*-Befehl* `inline`*. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.*

Bemerkung: Der Matlab-Befehl `sum(y)` berechnet $\sum_{i=1}^{n} y_i$ für eine Liste $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Damit kann man gewisse for-Schlaufen in den Programmen vermeiden. Weiter kann man den Befehl `y(end)` benutzen, um auf das letzte Element der Liste y zuzugreifen (eine Alternative zu `y(length(y))`).

Aufgabe 4: (A+B)

Betrachten Sie die Trapezregel

$$T[f] = \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1)) \simeq \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie: Für jedes $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$ existiert ein $\xi \in [0,1]$, so dass

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - T[f] = -\frac{1}{12} f''(\xi).$$

Hinweis: Betrachten Sie $p(x) = f(0) + (f(1) - f(0))x$ *das Interpolationspolynom vom Grad eins zu* $f(x)$ *und zeigen Sie, dass* $T[f] = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x$. *Unter Verwendung von* $f(x) - p(x) = \frac{1}{2}\omega_1(x) f''(\xi(x))$, *wobei* $\omega_1(x) = x(x-1)$ *und* $\xi : [0,1] \to [0,1]$, *zeigen Sie, dass*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - T[f] \geq -\frac{1}{12} f''(\xi_1)\,, \quad \textit{sowie} \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - T[f] \leq -\frac{1}{12} f''(\xi_2)\,,$$

wobei $f''(\xi_1) = \max_{\xi\in[0,1]} f''(\xi)$ *und* $f''(\xi_2) = \min_{\xi\in[0,1]} f''(\xi)$. *Wenn in einem der Fälle Gleichheit eintritt, ist die Aussage mit* $\xi = \xi_1$ *oder* $\xi = \xi_2$ *gezeigt. Sonst nehmen Sie an, dass*

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - T[f] > -\frac{1}{12} f''(\xi_1)\,, \quad \textit{sowie} \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - T[f] < -\frac{1}{12} f''(\xi_2)\,,$$

und verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

Aufgabe 5: (A+B)

Auf dem reellen Vektorraum $V = \mathcal{C}([a,b])$ der stetigen Funktionen definieren wir

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_a^b f(x) g(x) \omega(x)\,\mathrm{d}x, \quad f, g \in V,$$

wobei $\omega(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$ eine fest gewählte Gewichtsfunktion ist. Zeigen Sie, dass $\langle f, g \rangle$ ein Skalarprodukt ist, d. h.

i) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

ii) $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$

iii) $\langle cf, g \rangle = c\langle f, g \rangle$

iv) $\langle f, f \rangle \geq 0, \quad \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$

für alle $f, g, h \in V$ und alle $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6: (A+B)*

Seien $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Polynome mit $p_n \neq 0$ von Grad n, die auf dem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ orthogonal bezüglich des Gewichtes ω sind, d. h. $\langle p_i, p_j \rangle = 0$, $i \neq j$ (s. Aufgabe 5).

(a) Zeigen Sie, dass $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_n([a, b])$, $n \geq 0$, bilden. Bestimmen Sie für ein allgemeines Polynom $q \in \mathbb{P}_n([a, b])$ die (Fourier-)Koeffizienten c_k in der Basisdarstellung $q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k \, p_k(x)$.

Hinweis: *Um die lineare Unabhängigkeit von $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ zu beweisen, betrachten Sie $\sum_{j=0}^{n} \alpha_j p_j(x) = 0$ für alle x und zeigen Sie, dass*

$$0 = \langle \sum_{j=0}^{n} \alpha_j p_j(x), p_k \rangle = \alpha_k \langle p_k, p_k \rangle \, .$$

Mit $\langle q, p_k \rangle = \sum_{j=0}^{n} c_j \langle p_j, p_k \rangle$ berechnen Sie die Koeffizienten c_k von $q \in \mathbb{P}_n([a, b])$.

(b) Zeigen Sie, dass $\langle p_n, q \rangle = 0$, $\forall q \in \mathbb{P}_{n-1}([a, b])$, $n \geq 0$.

Hinweis: *Mit der Basisdarstellung $q(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j p_j(x)$ betrachten Sie das Skalarprodukt $\langle p_n, q \rangle$ und verwenden Sie die Orthogonalität von $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$.*

Abgabe: Dienstag, 31. März 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`