Serie 6

zur 16. KW (13.04. - 19.04.2009)

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Ordnung der summierten Quadraturformel

$$Q_h[f] := \frac{4}{3}T_{h/2}[f] - \frac{1}{3}T_h[f]\,,$$

wobei $T_h[f]$ die summierte Trapezregel ist.

Aufgabe 2: *

Bestimmen Sie sowohl die Knoten x_0, x_1 als auch die Gewichte A, B der Quadraturformel

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx Af(x_0) + Bf(x_1)$$

so, dass die Formel eine möglichst hohe Ordnung hat. Welches ist die Ordnung?

Aufgabe 3:

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `function Int = Quad_SumGauss4(f, a, b, h)` um die numerische Approximationen des Integrals $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mit der summierten Gauss-Quadraturformel $Q_h[f]$ vierter Ordnung und konstante Schrittweite h zu berechnen.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Test_SumGauss4` zur numerischen Berechnung der Integrale

$$I_1 = \int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

mit der summierten Gauss-Quadraturformel vierter Ordnung für $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, 16$. Zeichnen Sie den absoluten Fehler der Approximation von I_1 und bestimmen Sie die Konvergenzordnung. Schätzen Sie den Fehler der Approximation von I_2 mit $|Q_{2h}[f] - Q_h[f]|$, zeichnen Sie den Fehler und verifizieren Sie, dass die Konvergenzordnung $\frac{1}{3}$ ist. Warum wird hier nicht die optimale Konvergenzordnung erreicht?

Hinweis: Die summierte Gauss-Quadratur vierter Ordnung lautet

$$Q_h[f] = h\sum_{j=0}^{N-1}\left\{\omega_1 f\left(a + h\xi_1 + jh\right) + \omega_2 f\left(a + h\xi_2 + jh\right)\right\}\,, \quad N = \frac{b-a}{h}.$$

wobei $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$, $\xi_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, $\xi_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 4: (A+B)*

Zeigen Sie, dass eine symmetrische Quadraturformel, gegeben durch (ω_i, ξ_i), $i = 1, \dots, n$, immer Ordnung p mit p gerade hat.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Quadraturformel Polynome $q \in \mathbb{P}_{2k}$, $k \geq 0$, exakt integriert. Zeigen Sie, dass die Quadraturformel auch Polynome vom Grad $2k+1$ exakt integriert, indem Sie ein Polynom $q \in \mathbb{P}_{2k+1}$ als $q(x) = c(x - 1/2)^{2k+1} + r(x)$, $r(x) \in \mathbb{P}_{2k}$ schreiben. Zeigen Sie, dass $\int_0^1 q(x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \int_0^1 r(x)\,\mathrm{d}x$. Zeigen Sie mit Hilfe der Symmetrie, dass $Q[q] = Q[r]$ und schliessen Sie auf die Behauptung.

Aufgabe 5: (A+B)

Für die Gauss-Quadratur $Q_n[f]$ mit Knoten ξ_i und Gewichten ω_i, $i = 1, \dots, n$, zeigen Sie, dass $\omega_i > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Hinweis: Für die Polynome L_i, gegeben durch $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - \xi_j}{\xi_i - \xi_j}$ gilt $L_i \in \mathbb{P}_{n-1}$, also $L_i^2 \in \mathbb{P}_{2n-2}$. Überlegen Sie, dass die nicht negativen Funktionen $L_i^2 \not\equiv 0$ exakt integriert werden. Zeigen Sie, dass $0 < \ldots = Q_n[L_i^2] = \ldots = \omega_i$, $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 6: (A+B)

Betrachten Sie die Tschebyscheff-Polynome

$$T_n(x) = \cos(n\varphi) \quad x = \cos(\varphi)\,,\ x \in [-1, 1]\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Zeigen Sie, dass die Polynome $T_n(x)$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ bezüglich der Gewichtsfunktion $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ ein System von orthogonalen Polynomen bilden.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $\int_{-1}^{1} T_k(x) T_j(x) \omega(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \cos(k\varphi)\,\cos(j\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. Berechnen Sie dann, dass

$$\int_0^{\pi} \cos(k\varphi)\,\cos(j\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} 0 & \textit{falls } k \neq j\,, \\ \frac{\pi}{2} & \textit{falls } k = j > 0\,, \\ \pi & \textit{falls } k = j = 0\,. \end{cases}$$

Abgabe: Dienstag, 14. April 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`