Serie 7

zur 17. KW (20.04. - 26.04.2009)

Aufgabe 1: *

Berechnen Sie von Hand die LU-Zerlegung (ohne Pivot-Suche) der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Benutzen Sie die LU-Zerlegung zur Berechnung der Lösung der beiden linearen Gleichungssysteme $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}^{(i)}$, $i = 1, 2$, mit $\boldsymbol{b}^{(1)} = (2, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{b}^{(2)} = (3, 7, 8)^T$.

Aufgabe 2:

Sei $\boldsymbol{L} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix, deren sämtliche Diagonaleinträge gleich eins sind. Bestimmen Sie $\boldsymbol{L}^{-1}$.

Hinweis: Überlegen Sie, dass $\boldsymbol{L}^{-1} = \left(\boldsymbol{y}^{(1)} | \boldsymbol{y}^{(2)} | \dots | \boldsymbol{y}^{(n)}\right)$*, wobei* $\boldsymbol{y}^{(i)}$ *die Lösung des Systems* $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)}$*. Hier bezeichnet* $\boldsymbol{e}^{(i)}$ *den i-ten kanonischen Einheitsvektor. Um das System* $\boldsymbol{L}\boldsymbol{y}^{(i)} = \boldsymbol{e}^{(i)}$ *zu lösen verwenden Sie die Vorwärtssubstitution.*

Aufgabe 3:

Seien $\boldsymbol{L}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $k = 1, \dots, n-1$ unteren Dreiecksmatrizen der Form

$$\boldsymbol{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{L}_k^{-1}$.
Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{L}_{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ l_{21} & \ddots & & & & \\ l_{31} & \ddots & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1k} & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} \dots & l_{nk} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (P)*

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `function [L, U] = LUdecomp(A)` um die LU-Zerlegung ohne Pivotsuche einer $n \times n$-Matrix $\boldsymbol{A}$ zu berechnen. Schreiben Sie dann zwei weitere Matlab-Funktionen

`function y = Lsolve(L, b)` und `function x = Usolve(U, y)`

zur Lösung der beiden linearen Gleichungssysteme $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Test_LUdecomp` zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 5x_1 & + & 2x_2 & & & - & 2x_4 & = & 54 \\ x_1 & + & 7x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -12 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 8x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & 9x_4 & = & -1 \end{array}$$

mit Hilfe der LU-Zerlegung ohne Pivotsuche.

Hinweis: Mit dem Befehl `A\b` *kann man die Lösung verifizieren.*

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 5: (A+B)

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ eine strikt diagonal dominante $n \times n$-Matrix, d.h. $\displaystyle\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass der Gauss-Algorithmus dann ohne Pivotsuche durchführbar ist.

Hinweis: Überlegen Sie, dass a_{11} ein zulässiges Pivotelement für den ersten Eliminationsschritt ist. Nach dem ersten Eliminationsschritt ergibt sich die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}^{(1)} & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

Zeigen Sie, dass die Matrix $\boldsymbol{A}^{(1)}$ wieder strikt diagonal dominant ist. Somit ist a_{22} ein zulässiges Pivotelement für den zweiten Eliminationsschritt. Um die strikte Diagonaldominanz von $\boldsymbol{A}^{(1)}$ zu zeigen, verwenden Sie, dass $a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - \dfrac{a_{i1}a_{1k}}{a_{11}}$, $i, k = 2, 3, \ldots, n$.

Aufgabe 6: (A+B)*

Sei $\boldsymbol{A}$ eine reguläre $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass die LU-Zerlegung $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$ eindeutig ist.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass zwei LU-Zerlegungen $\boldsymbol{LU} = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}'\boldsymbol{U}'$ *existieren. Zeigen Sie, dass* $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'^{-1}$. *Aufgrund der Struktur der Matrizen* $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}'$ *und* $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'^{-1}$ *(siehe Aufgabe 3) schliessen Sie auf* $\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{L}' = \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}'^{-1} = \boldsymbol{I}$.

Abgabe: Dienstag, 21. April 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`