Serie 8

zur 18. KW (27.04. - 03.05.2009)

Aufgabe 1: *

Seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie von Hand die LU-Zerlegung (mit Spaltenpivotsuche) $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LU}$ von $\boldsymbol{A}$, und lösen Sie damit das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Hinweis: Mit den Matlab-Befehlen `[L, U, P] = lu(A)` *und* `x = A\b` *könnten Sie Ihre Lösung verifizieren.*

Aufgabe 2:

Sei $\boldsymbol{L}_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine untere Dreiecksmatrix der Form

$$\boldsymbol{L}_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Sei p eine Permutation, die nur Zahlen aus $\{k+1, \ldots, n\}$ permutiert, und $\boldsymbol{P}$ die zugehörige Permutationsmatrix. Zeigen Sie, dass

$$\boldsymbol{PL}_k\boldsymbol{P}^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & l_{p(k+1),k} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{p(n),k} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\boldsymbol{L}_k$ als Summe

$$\boldsymbol{L}_k = \boldsymbol{I} + \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & l_{k+1,k} & 0 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & l_{n,k} & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3: (P)(A+B)

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `function L = CholeskyDecomp(A)`, die sich für symmetrische Matrizen $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wie folgt verhält:

- Ist $\boldsymbol{A}$ positiv definit (d.h. alle Eigenwerte sind positiv), berechnet man den Cholesky-Faktor $\boldsymbol{L}$.
- Anderfalls liefert sie eine Fehlermeldung.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Test_CholeskyDecomp` zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}$$

mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

Hinweis: Zur Berechnung der Eingenwerte von $\boldsymbol{A}$ verwenden Sie den `MATLAB`*-Befehl* `eig`*. Zur Lösung des Systems $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LL}^T$ verwenden Sie die* `MATLAB`*-Routinen* `Lsolve` *und* `Usolve` *(siehe Aufgabe 4, Serie 7).*

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 4: (A+B)

Sei $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i) $\boldsymbol{A}$ ist regulär.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} = n$. *Nehmen Sie an, dass* $\operatorname{rang}\boldsymbol{A} \neq n$. *Dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$. Betrachten Sie $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$.*

ii) $a_{ii} > 0$, $i = 1, \dots, n$.

Hinweis: Betrachten Sie den i-ten kanonischen Einheitsvektor $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{e}_i^T\boldsymbol{Ae}_i$.

iii) Alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind reell und strikt positiv.

Hinweis: Sei $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Schreiben Sie $\boldsymbol{v}$ als $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + i\boldsymbol{v}_2$ mit $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \neq \boldsymbol{0}$. Betrachten Sie $\boldsymbol{v}^H\boldsymbol{Av}$ und $\boldsymbol{v}^H\boldsymbol{v}$.

Bemerkung: Für beliebige $(m \times n)$-Matrizen $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i=1,\dots,m,\, j=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ definiert man die Matrix $\boldsymbol{A}^H$ durch

$$\left(\boldsymbol{A}^H\right)_{ij} = \overline{a_{ji}},$$

wobei $\overline{a_{ji}}$ die komplex konjugierte Zahl von a_{ji} ist.

Aufgabe 5: (A+B)*

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass eine eindeutige untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L} = (l_{ij})_{i,j=1}^n$ existiert mit $l_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$, und $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$.

Hinweis: Nach Satz 3 im Abschnitt IV.4 des Vorlesungsskript existieren eindeutige Matrizen $\widetilde{\boldsymbol{L}}$ *(untere Dreiecksmatrix mit* $\widetilde{l}_{ii} = 1$*) und* $\boldsymbol{D}$ *(Diagonalmatrix mit* $d_{ii} > 0$*) mit* $\boldsymbol{A} = \widetilde{\boldsymbol{L}}\boldsymbol{D}\widetilde{\boldsymbol{L}}^T$*. Mit Hilfe von* $\boldsymbol{D}^{1/2}$ *zerlegen Sie* $\boldsymbol{D}$*.*

Abgabe: Dienstag, 21. April 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`