Serie 9

zur 19. KW (04.05. - 10.05.2009)

Aufgabe 1: *

Nach verschiedenen Autofahrten zwischen den Städten Zürich, Chur, St. Gallen und Genf werden auf dem Tachometer folgenden Distanzen abgelesen (alle Angaben in km):

Zürich-Genf	St. Gallen-Genf	Genf-Chur	Chur-St. Gallen	Zürich-Chur
290	370	400	200	118

Bestimmen Sie die im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate den ausgeglichenen Wert für die Länge der Teilstrecke St. Gallen-Zürich.

Aufgabe 2:

Eine Schwingung soll durch eine Funktion der Form

$$y(t) = \alpha \sin(t) + \beta \sin(2t)$$

approximiert werden. Zur Bestimmung der Unbekannten α und β werden in verschiedenen Punkten t_i die Amplitudenwerte y_i gemessen:

t_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
y_i	$0.3 \cdot 10^{-8}$	4.2	-0.9598	1.4

(a) Geben Sie das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung von α und β an.

(b) Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe der Methode der Normalengleichungen.

(c) Geben Sie die Norm des Defektes $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2$ für die Lösung des Ausgleichsproblems $\boldsymbol{x}^*$ an.

Aufgabe 3: (P)*

Der Anhalteweg a eines Autos wird üblicheweise definiert als die Summe aus Reaktionsweg r und Bremsweg b. Man modelliert

$$a = r + b = t_s v + \frac{v^2}{2\mu g} ,$$

wobei v die Geschwindigkeit ist, t_s die Schreckzeit, $\mu \leq 1$ der Gleitreibungskoeffizient und $g \approx 9.8 m/s^2$ die Gravitationskonstante. Zur Bestimmung von t_s und μ wurden gemessen:

v in km/h	30	40	50	60	70	80	90	100
a in m	10	20	25	30	45	55	60	80

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Anhalteweg` zur Lösung des Ausgleichsproblems für die Parameter t_s und $1/\mu$ unter Verwendung der Normalengleichungen. Zeichnen Sie die den berechneten funktionalen Zusammenhang des Anhalteweges in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit mit den Messwerten zusammen.

Hinweis: Passen Sie zuerst die Masseinheiten ein.

Aufgabe 4: (P)(A+B)

Zu den Zeiten t_i, $i = 1, \ldots, 10$, werden für die physikalische Grösse $f(t)$ die Messwerte f_i beobachtet:

t_i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
f_i	100	34	17	12	9	6	5	4	4	2

Setzen Sie die unbekannte Funktion f als Linearkombination $f(t) = \sum_{k=1}^{4} \gamma_k \phi_k(t)$ der bekannten Funktionen $\phi_j(t)$, $j = 1, \ldots, 4$ an, wobei

$$\phi_1(t) = \frac{1}{t}, \quad \phi_2(t) = \frac{1}{t^2}, \quad \phi_3(t) = \mathrm{e}^{-(t-1)}, \quad \phi_4(t) = \mathrm{e}^{-2(t-1)}.$$

Die Koeffizienten γ_k sollen so bestimmt werden, dass $\sum_{i=1}^{10} (f(t_i) - f_i)^2$ minimal wird.

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `Ausgleichsprob_LinKomb` zur Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Normalgleichungen, sowie mit Hilfe der QR-Zerlegung der Fehlergleichungsmatrix $\boldsymbol{A}$. Ermitteln Sie, ab welcher Dezimalstelle sich die Koeffizienten γ_j der beiden Lösungen unterscheiden. Bestimmen Sie die Konditionszahl der Fehlergleichungsmatrix $\boldsymbol{A}$ und der Matrix $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

Hinweis: Zur Berechnung der QR-Zerlegung der Fehlergleichungsmatrix $\boldsymbol{A}$ verwenden Sie den `MATLAB`*-Befehl* `[Q, R] = qr(A)`. *Zur Bestimmung der Konditionszahl einer Matrix verwenden Sie den* `MATLAB`*-Befehl* `cond`. *Der Befehl* `format long` *bewirkt, dass alle Dezimalstellen angezeigt werden.*

Ein Skelett des Codes `Ausgleichsprob_LinKomb.m` *kann man von der Webseite herunterladen.*

Aufgabe 5: (A+B)

Nehmen Sie an, dass die Variablen $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$ durch ein physikalisches Experiment bestimmt werden. Statt der exakten Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

erhält man wegen Messfehlern die Resultate von $(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b}$, mit

$$\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 + 10^{-4} \\ 10^{-4} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Lösung $\boldsymbol{x}$ von $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ und die Lösung $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ von $(\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\widetilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b})$.

(b) Berechnen Sie die Inverse von $\boldsymbol{A}$ und die Konditionszahl $\kappa_\infty(\boldsymbol{A})$.

(c) Verifizieren Sie, dass der relative Fehler der Lösung, $\|\widetilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty / \|\boldsymbol{x}\|_\infty$, die theorerische Abschätzung aus der Vorlesung (Satz 2, Kapitel IV.6) erfüllt.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst

$$\frac{\|\boldsymbol{A} - (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty} = \frac{\|\Delta\boldsymbol{A}\|_\infty}{\|\boldsymbol{A}\|_\infty} \quad \textit{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{b})\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \frac{\|\Delta\boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty}.$$

Aufgabe 6: (A+B)

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, vom Rang n und

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

eine QR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, wobei $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit $r_{ii} > 0$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ symmetrisch und positiv definit ist.

Hinweis: Um die Symmetrie zu zeigen, zeigen Sie, dass $(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. *Um die positive Definitheit zu zeigen, zeigen Sie zuerst, dass* $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R}$. *Dann betrachten Sie* $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *für* $\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, dass $\boldsymbol{R}^T$ der Cholesky-Faktor von $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ ist.

Hinweis: Überlegen Sie zuerst, dass eine eindeutige untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ *mit* $l_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ *und* $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$ *existiert. Dann zeigen Sie, dass* $\boldsymbol{R}^T\left(\boldsymbol{R}^T\right)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$. *Wegen der Eindeutigkeit des Cholesky-Faktors folgt die Behauptung.*

Abgabe: Dienstag, 5. Mai 2009, bis 17 Uhr im Fach

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`