Serie 11

mit Musterlösungen

Aufgabe 1: (P)*

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion
`function [x, iter] = NewtonIter_System(f1, f2, x0, max_iter, tol)`,
die eine numerische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Newton-Iteration für den Startwert $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^T$ und der Genauigkeit `tol` bestimmt, wobei höchstens `max_iter` Iterationsschritte durchgeführt werden. Approximieren Sie die partiellen Ableitungen von $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)^T$ in der Jacobi-Matrix durch Differenzenquotienten, z. B.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1, x_2) \simeq \frac{f_1(x_1, x_2 + h) - f_1(x_1, x_2)}{h}, \quad h = 10^{-8}.$$

Schreiben Sie eine Matlab-Routine `Test_NewtonIter_System`, die die numerische Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sinh(x_1 x_2) + x_1^2 + x_2^2 + x_1 &= 1 \\ x_1^3 - x_2^2 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

mit $\boldsymbol{x}^{(0)} = (-1, 1)$ und `tol`$= 10^{-12}$ berechnet.

<u>Hinweis:</u> Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 2: (P)*

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion
`function [x, y] = Euler(f, y0, h , x_0, x_max)`,
die eine numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max} \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite h bestimmt.

Schreiben Sie eine Matlab-Routine `Test_Euler` zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x+2}{x+1} y\,, \quad 0 \le x \le 5 \\ y(x_0) &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = 0.01$. Zeichnen Sie die numerische Lösung und die exakte Lösung $y(x) = (1+x)\mathrm{e}^{(1+x)}$ zusammen.

Hinweis: *Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.*

Aufgabe 3: (P)

Schreiben Sie `Matlab`-Routinen

`function [x, y1, y2] = Euler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max)` und

`function [x, y1, y2] = ModEuler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max)`

zur numerischen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max} \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max} \\ y_1(x_0) &= y_1^0\,,\ y_2(x_0) = y_2^0 \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren bzw. mit dem modifizierten Euler-Verfahren.

Schreiben Sie `Matlab`-Routinen `Test_Euler_System` und `Test_ModEuler_System` zur numerischen Lösung der van der Pol'sche Differentialgleichung

$$\begin{cases} y'' - \lambda(1-y^2)y' + y = 0\,, \quad 0 \le x \le 5 \\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die Lösung für $\lambda = 0$ mit Schrittweite $h = 0.025, 0.0025$ und plotten Sie die mit der exakten Lösung zusammen. Für $\lambda = 12$ berechnen Sie die Lösung und plotten Sie jede ihrer Komponente.

Hinweis: *Setzen Sie $y_1 := y$ und $y_2 := y'$ und schreiben Sie zuerst die Differentialgleichung 2. Ordnung als ein System von Differentialgleichungen. Benutzen Sie die Verfahren auf dieses System. Für $\lambda = 0$ lautet die exakte Lösung $(y_1, y_2)^T = (\sin x, \cos x)^T$.*

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 4: (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage (Banachscher Fixpunktsatz im $\mathbb{R}^n$):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes, beschränktes Gebiet und $\mathbf{\Phi} : \Omega \to \Omega$ eine Kontraktion. Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ mit $\boldsymbol{x}^* = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}^*)$. Zudem konvergiert die Folge $\boldsymbol{x}_{n+1} = \mathbf{\Phi}(\boldsymbol{x}_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ für jedes $\boldsymbol{x}_0 \in \Omega$ gegen $\boldsymbol{x}^*$.

Hinweis: *Um die Existenz eines Fixpunktes $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ von $\mathbf{\Phi}$ zu zeigen, zeigen Sie, dass $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\ge 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu zeigen Sie, dass*

$$\|\boldsymbol{x}_m - \boldsymbol{x}_n\| \le \frac{L^n}{1-L}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|\,.$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten Sie einen weiteren Fixpunkt $\boldsymbol{x}' \in \Omega$ von $\mathbf{\Phi}$. Zeigen Sie dann, dass $\|\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{x}'\| = 0$.

Aufgabe 5: (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\boldsymbol{\Phi} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $\boldsymbol{x}^* \in \Omega$ ein Fixpunkt von $\boldsymbol{\Phi}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, in deren induzierten Matrixnorm $\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x}^*)\| < 1$ gilt. Dann gibt es eine (kompakte) Umgebung

$$B_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ : \ \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*\| \le \varepsilon\},$$

so dass $\boldsymbol{\Phi} : B_\varepsilon \to B_\varepsilon$ eine Kontraktion ist, die B_ε in sich abbildet.

Hinweis: Überlegen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{x})\| < 1$, $\boldsymbol{x} \in B_\varepsilon(\boldsymbol{x}^*)$. Unter Verwendung von

$$\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| = \left\| \int_0^1 \boldsymbol{\Phi}'(t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y})\, dt\, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \right\| \le \max_{\boldsymbol{\xi} \in \{t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} : t \in [0,1]\}} \|\boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{\xi})\| \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in B_\varepsilon$, zeigen Sie, dass $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{y})\| \le L\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$ mit $L < 1$.

Um zu zeigen, dass B_ε in sich abgebildet wird, nehmen Sie ein $\boldsymbol{x} \in B_\varepsilon$ und zeigen Sie, dass $\|\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^*\| \le \varepsilon$.

Abgabe: ohne Abgabe; Falls man zusätzlichen Programmieraufgaben abgeben möchte, sollte man die Programmieraufgaben zur Serie 11 bis 22. Mai abgeben.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`