Serie 11

(Abgabe: 24. Mai 2011 - Zusatzblatt)

Aufgabe 11.1 (P)*

Schreiben Sie eine `Matlab`-Funktion

```
function [x,iter] = NewtonIter_System(f1,f2,f3,x0,max_iter,tol)
```

die eine numerische Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,x_3) &= 0, \\ f_2(x_1,x_2,x_3) &= 0, \\ f_3(x_1,x_2,x_3) &= 0, \end{aligned}$$

mit der Newton-Iteration für den Startwert $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})^T$ und der Genauigkeit `tol` bestimmt, wobei höchstens `max_iter` Iterationsschritte durchgeführt werden. Approximieren Sie die partiellen Ableitungen von $f = (f_1, f_2, f_3)^T$ in der Jacobi-Matrix durch Differenzenquotienten, z. B.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1,x_2,x_3) \approx \frac{f_1(x_1,x_2+h,x_3) - f_1(x_1,x_2,x_3)}{h}, \quad h = 10^{-8}.$$

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routine `Test_NewtonIter_System`, die die numerische Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sinh(x_1x_2) + x_1^2 + x_2^2 + x_2 &= 1, \\ x_1^3 - x_2^2 + x_2 &= -1, \\ x_1^2 - x_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

mit $x^{(0)} = (-1, 1, -1)$ und `tol`$= 10^{-12}$ berechnet.

Hinweis. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Lösung 11.1

```
function [x,iter] = NewtonIter_System(f1,f2,f3,x0,max_iter,tol)

h = 1e-8; % Schrittweite zum Differenzenquotienten

x = reshape(x0,3,1); % Startwert

iter = 0; % Anzahl der Iterationen

% Funktion f = (f_1,f_2,f_3)^T
f = @(x) [f1(x(1),x(2),x(3));f2(x(1),x(2),x(3));f3(x(1),x(2),x(3))];

while norm(f(x)) >= tol && iter < max_iter
    % Jacobi-Matrix
    Df(1, 1) = (f1(x(1)+h, x(2), x(3)) - f1(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(1, 2) = (f1(x(1), x(2)+h, x(3)) - f1(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(1, 3) = (f1(x(1), x(2), x(3)+h) - f1(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(2, 1) = (f2(x(1)+h, x(2), x(3)) - f2(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(2, 2) = (f2(x(1), x(2)+h, x(3)) - f2(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(2, 3) = (f2(x(1), x(2), x(3)+h) - f2(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(3, 1) = (f3(x(1)+h, x(2), x(3)) - f3(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(3, 2) = (f3(x(1), x(2)+h, x(3)) - f3(x(1), x(2), x(3)))/h;
    Df(3, 3) = (f3(x(1), x(2), x(3)+h) - f3(x(1), x(2), x(3)))/h;

    % die Loesung
    x = x - Df\[f1(x(1),x(2),x(3)); f2(x(1),x(2),x(3)); f3(x(1),x(2),x(3))];

    iter = iter + 1;
end
```

```
f1 = @(x1,x2,x3) sinh(x1*x2) + x1^2 + x2^2 + x3 - 1;
f2 = @(x1,x2,x3) x1^3 - x2^2 + x2 + 1;
f3 = @(x1,x2,x3) x1^2 - x3^2;

x0 = [-1, 1, 0];
max_iter = 20;
tol = 10^(-12);

[loesung, iter] = NewtonIter_System(f1,f2,f3,x0,max_iter,tol)
```

Aufgabe 11.2 (P)*

Schreiben Sie zwei `Matlab`-Funktionen

`function [x,y] = Euler(f,y0,h,x_0,x_max)` und
`function [x,y] = ModEuler(f,y0,h,x_0,x_max)`,

die eine numerische Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x,y)\,, \qquad x_0 \le x \le x_{max} \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren, resp. dem modifizierten Euler-Verfahren, mit konstanter Schrittweite h bestimmen.

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routine `Test_Euler` zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x+2}{x+1}y\,, \qquad 0 \le x \le 5 \\ y(x_0) &= \mathrm{e} \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren mit konstanter Schrittweite $h = 0.01$. Zeichnen Sie die numerische Lösung des Euler-Verfahrens, des mdoifizierten Euler-Verfahrens und die exakte Lösung $y(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^{(1+x)}$ zusammen.

Hinweis. Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Lösung 11.2

```
function [x, y] = Euler(f, y0, h, x_0, x_max)

x = x_0 : h : x_max;

y = zeros(length(x), 1);

y(1) = y0;

for i = 1 : (length(x)-1)
y(i+1) = y(i) + h*f(x(i), y(i));
end
```

```
function [x, y] = ModEuler(f, y0, h, x_0, x_max)

x = x_0 : h : x_max;
y = zeros(length(x), 1);
y(1) = y0;

for i = 1 : (length(x)-1)
    y(i+1) = y(i) + h/2*f(x(i),y(i)) + h/2*f(x(i)+h/2,y(i)+h/2*f(x(i),y(i)));
end
```

```
f = @(x,y) (x+2)./(x+1) .* y;
loesung = @(x) (1+x).*exp(1+x);

[xEuler, yEuler] = Euler(f, exp(1), 0.01, 0, 5);
[xModEuler, yModEuler] = ModEuler(f, exp(1), 0.01, 0, 5);

plot(xEuler, loesung(xEuler), xEuler, yEuler, xModEuler, yModEuler)
legend('Exakte Loesung', 'Numer. Loesung mit Euler', ...
    'Numer. Loesung mit mod. Euler', 'Location','NorthWest')
axis([0 5.5 -0.001 2500])
```

Aufgabe 11.3 (P)*

Schreiben Sie eine `Matlab`-Funktion

```
function [x,y1,y2] = Euler_System(f1,f2,y0,h,x_0,x_max)
```

zur numerischen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max} \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2)\,, \quad x_0 \le x \le x_{max} \\ y_1(x_0) &= y_1^0\,, \\ y_2(x_0) &= y_2^0 \end{aligned}$$

mit dem Euler-Verfahren.

Schreiben Sie eine `Matlab`-Routinen `Test_Euler_System` zur numerischen Lösung einer gedämpften harmonischen Schwingung

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y' + y &= 0\,, \quad 0 \le x \le 5 \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1\,. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die numerische Lösung für $\lambda = 0$ mit Schrittweite $h = 0.025$ und $h = 0.0025$ und plotten Sie die Approximationen von y und y' zusammen mit der exakten Lösung.

Für $\lambda = 1$ berechnen Sie die Lösung mit Schrittweite $h = 0.0025$ und plotten Sie wieder beide Komponenten.

Hinweis. Setzen Sie $y_1 := y$ und $y_2 := y'$ und schreiben Sie zuerst die Differentialgleichung zweiter Ordnung als ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung um. Benutzen Sie das Verfahren für dieses System.

Für $\lambda = 0$ lautet die exakte Lösung $(y_1, y_2)^T = (\sin x, \cos x)^T$.

Die Skelette der Codes kann man von der Webseite herunterladen.

Lösung 11.3

```
function [x, y1, y2] = Euler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max)

x = x_0 : h : x_max;

y1 = zeros(length(x), 1);
y2 = zeros(length(x), 1);

y1(1) = y0(1);
y2(1) = y0(2);

for i = 1 : (length(x)-1)
y1(i+1) = y1(i) + h*f1(x(i), y1(i), y2(i));
    y2(i+1) = y2(i) + h*f2(x(i), y1(i), y2(i));
end
```

```
y0 = [0, 1];
x_0 = 0;
x_max = 10;

% Test mit lambda = 0
lambda = 0;
f1 = @(x,y1,y2) y2;
f2 = @(x,y1,y2) -lambda*y2 - y1;

loesung_y1 = @(x) sin(x);
loesung_y2 = @(x) cos(x);

% Grosse Schrittweite
h = 0.025;
[x, y1, y2] = Euler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max);

figure(1)
subplot(2, 2, 1)
plot(x, y1, x, loesung_y1(x))
title('h = 0.025');
legend('numerisch', 'exakt')
xlabel('x')
ylabel('y_1(x) = y(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])

subplot(2, 2, 3)
plot(x, y2, x, loesung_y2(x))
title('h = 0.025');
legend('numerisch', 'exakt')
```

```
xlabel('x')
ylabel('y_2(x) =y''(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])

% Kleine Schrittweite
h = 0.0025;
[x, y1, y2] = Euler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max);

subplot(2, 2, 2)
plot(x, y1, x, loesung_y1(x))
title('h = 0.0025');
legend('numerisch', 'exakt')
xlabel('x')
ylabel('y_1(x) = y(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])

subplot(2, 2, 4)
title('h = 0.0025');
plot(x, y2, x, loesung_y2(x))
legend('numerisch', 'exakt')
xlabel('x')
ylabel('y_2(x) =y''(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])

% Test mit lambda = 1
lambda = 1;
f1 = @(x,y1,y2) y2;
f2 = @(x,y1,y2) -lambda*y2 - y1;

[x, y1, y2] = Euler_System(f1, f2, y0, h, x_0, x_max);

figure(2)
subplot(1, 2, 1)
plot(x, y1)
title('y_1(x) = y(x)');
xlabel('x'); ylabel('y_1(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])

subplot(1, 2, 2)
plot(x, y2)
title('y_2(x) = y''(x)');
xlabel('x'); ylabel('y_2(x)')
axis([0 10 -1.1 1.1])
```

Aufgabe 11.4 (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage (Banachscher Fixpunktsatz in $\mathbb{R}^n$):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossenes, beschränktes Gebiet und $\Phi\colon \Omega \to \Omega$ eine Kontraktion. Dann existiert ein eindeutiger Fixpunkt $x^* \in \Omega$ mit $x^* = \Phi(x^*)$. Zudem konvergiert die Folge $x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)})$, $n = 0, 1, \ldots$ für jedes $x^{(0)} \in \Omega$ gegen x^*.

Hinweis. Um die Existenz eines Fixpunktes $x^* \in \Omega$ von Φ zu zeigen, zeigen Sie, dass $\{x^{(n)}\}_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Dazu zeigen Sie, dass

$$\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| \leq \frac{L^n}{1-L} \left\|x_1 - x_0\right\| .$$

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, betrachten Sie einen weiteren Fixpunkt $x' \in \Omega$ von Φ. Zeigen Sie dann, dass $\|x^* - x'\| = 0$.

Lösung 11.4

Existenz: Sei $x^{(0)} \in \Omega$ beliebig. Wir betrachten die Fixpunktiteration $x^{(n+1)} = \Phi(x^{(n)})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Da Φ eine Kontraktion ist, gilt

$$\left\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\right\| = \left\|\Phi(x^{(n)}) - \Phi(x^{(n-1)})\right\| \leq L \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| \leq \cdots \leq L^n \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| ,$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $L < 1$. Dabei ist die $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$.

Damit zeigen wir, dass $\{x^{(n)}\}_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist. Für $m > n$ (o. B. d. A.) gilt

$$\begin{aligned}
\left|x^{(m)} - x^{(n)}\right| &= \left\|\sum_{k=1}^{m-n} \left(x^{(n+k)} - x^{(n+k-1)}\right)\right\| \leq \sum_{k=1}^{m-n} \left\|x^{(n+k)} - x^{(n+k-1)}\right\| \\
&\leq \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| \sum_{k=1}^{m-n} L^{n+k-1} \quad \leq \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| L^n \sum_{k=0}^{\infty} L^k \\
&= \frac{L^n}{1-L} \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\| .
\end{aligned}$$

Da $L^n \to 0$, $n \to \infty$, existiert also tatsächlich zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\left\|x^{(m)} - x^{(n)}\right\| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$, und damit ist $\{x^{(n)}\}_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge. Da $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt, also kompakt, ist, konvergiert die Cauchy-Folge gegen einen Grenzwert $x^* \in \Omega$. Wegen der Stetigkeit von Φ gilt

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \Phi(x^{(n)}) = \Phi(\lim_{n\to\infty} x^{(n)}) = \Phi(x^*) .$$

Also ist x^* ein Fixpunkt von Φ.

Eindeutigkeit: Sei $x' \in \Omega$ ein weiterer Fixpunkt von Φ. Dann gilt

$$\|x^* - x'\| = \|\Phi(x^*) - \Phi(x')\| \leq L \|x^* - x'\| .$$

Damit gilt $\|x^* - x'\| = 0$, da $L < 1$ und $0 \leq (1 - L) \|x^* - x'\| \leq 0$. Da $\|\cdot\|$ eine Norm ist, folgt $x^* = x'$.

Aufgabe 11.5 (A+B)

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $x^* \in \Omega$ ein Fixpunkt von Φ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, in deren induzierten Matrixnorm $\|\Phi'(x^*)\| < 1$ gilt. Dann gibt es eine (kompakte) Umgebung

$$B_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| \leq \varepsilon\},$$

so dass $\Phi\colon B_\varepsilon(x^*) \to B_\varepsilon(x^*)$ eine Kontraktion ist, die $B_\varepsilon(x^*)$ in sich abbildet.

Hinweis. Überlegen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\|\Phi'(x)\| < 1$, $x \in B_\varepsilon(x^*)$. Mit der Bezeichnung $I(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$ und unter Verwendung von

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \left\| \int_0^1 \Phi'(tx + (1-t)y)\, dt\, (x-y) \right\| \leq \max_{\xi \in I(x,y)} \|\Phi'(\xi)\| \cdot \|x - y\|$$

für $x, y \in B_\varepsilon(x^*)$, zeigen Sie, dass $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\|$ mit $L < 1$.

Um zu zeigen, dass $B_\varepsilon(x^*)$ in sich abgebildet wird, nehmen Sie ein $x \in B_\varepsilon(x^*)$ und zeigen Sie, dass $\|\Phi(x) - x^*\| \leq \varepsilon$.

Lösung 11.5

Da Φ stetig differenzierbar ist, ist Φ' stetig auf Ω. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass $\|\Phi'(x)\| < 1$, $x \in B_\varepsilon(x^*)$. Deshalb gilt für $x, y \in B_\varepsilon(x^*)$:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| = \left\| \int_0^1 \Phi'(tx + (1-t)y)\, dt\, (x-y) \right\| \leq \max_{\xi \in I(x,y)} \|\Phi'(\xi)\| \cdot \|x - y\| \ .$$

Da $B_\varepsilon(x^*)$ konvex ist, gilt $I(x,y) = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\} \subset B_\varepsilon(x^*)$ und damit

$$\max_{\xi \in I(x,y)} \|\Phi'(\xi)\| =: L < 1.$$

Also gilt

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\, \|x - y\| \ ,$$

und Φ ist eine Kontraktion auf $B_\varepsilon(x^*)$. Um zu zeigen, dass $B_\varepsilon(x^*)$ in sich abgebildet wird, nehmen wir ein $x \in B_\varepsilon(x^*)$ und rechnen

$$\|\Phi(x) - x^*\| = \|\Phi(x) - \Phi(x^*)\| \leq L\, \|x - x^*\| < \|x - x^*\| \leq \varepsilon \,.$$

Also ist $\Phi(x) \in B_\varepsilon$. Dies gilt für jedes $x \in B_\varepsilon(x^*)$, also wird $B_\varepsilon(x^*)$ von Φ in sich abgebildet.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`