Serie 1

(Abgabe: 1. März 2011, 17 Uhr)

Aufgabe 1.1 *

Bestimmen Sie das Lagrangesche Interpolationspolynom zu den folgenden Stützpunkten:

j	0	1	2	3
x_j	-0.5	0	0.5	1
y_j	4	3	2	1

Hinweis. Die Lösung ist ein Polynom vom Grad eins.

Aufgabe 1.2 (P)

Zum Plotten der Lagrange-Polynome zu den Stützstellen `X(i)` schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `function [L, x_plot] = LagrangePlot(X)`. Testen Sie Ihre Implementation mit den Daten aus Aufgabe 1.

Hinweis. Die Struktur der `MATLAB`-Routine könnte z.B. so aussehen:

```
function [L, x_plot]=LagrangePlot(X)

n=length(X);

x_plot=linspace(min(X),max(X),100*n);

L=ones(n,length(x_plot));
for i=1:n % Das i-te Lagrange-Polynom
    for j=1:n
        if i~=j
            L(i,:) = ... ;
        end
    end
    figure(i)
    plot(x_plot, L(i,:))
    xlabel('x')
    title(['Das  ' num2str(i) '. Lagrange-Polynom'])
end

end
```

Aufgabe 1.3 *

Berechnen Sie das Interpolationspolynom p durch die drei Punkte $(x_0, y_0) = (0, 2)$, $(x_1, y_1) = (2, 4)$ und $(x_2, y_2) = (3, -1)$:

(a) $p(x) = \sum_{j=0}^{2} a_j x^j$ (monomiale Darstellung);

(b) $p(x) = \sum_{j=0}^{2} b_j L_j(x)$ mit $L_j(x) = \prod_{k \neq j} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$ (Lagrange-Darstellung);

(c) $p(x) = \sum_{j=0}^{2} c_j \omega_j(x)$ mit $\omega_j(x) = \prod_{i<j} (x - x_i)$ (Newton-Darstellung).

Verifizieren Sie, dass das Polynom in allen Fällen dasselbe ist.

Aufgabe 1.4 (P)*

(a) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `function interpol_wert = Newton_Interpol(X, Y, x)`, die mit der Newtonschen Interpolationsformel zu den Stützpunkten `(X(i), Y(i))` den interpolierten Wert `interpol_wert` an einer beliebigen Stelle `x` berechnet.

Hinweis. Die Struktur der `MATLAB`-Routine könnte z.B. so aussehen:

```
function interpol_wert= Newton_Interpol(X,Y,x)

n=length(X)-1;  % Grad des Interpolationspolynoms
divDiff=Y;      % divDiff: dividierte Differenzen
for k = 2:n+1
  for i = n+1:-1:k
    divDiff(i) = ...;
  end
end

% Auswertung des Polynoms an x
interpol_wert=divDiff(n+1);
for k=n:-1:1
  interpol_wert = ...;
end

end
```

(b) Mit Hilfe der Funktion `Newton_Interpol` berechnen Sie den interpolierten Wert $p(x)$ bei $x = 12.5$ zu der folgenden Wertetabelle für die Funktion $\log_2$:

j	0	1	2	3
X_j	11	12	13	14
Y_j	3.459432	3.584963	3.700440	3.807355

Vergleichen Sie den interpolierten mit dem exakten Wert bei $x = 12.5$. Zeichnen Sie $p(x)$ und $\log_2(x)$, zuerst für $x \in [11, 14]$ und dann für $x \in [1, 50]$. Zeichnen Sie auch die Fehlerfunktion $r(x) = \log_2(x) - p(x)$ für $x \in [11, 14]$.

Aufgabe 1.5 (A+B)

Seien $L_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ die Lagrange-Polynome zu den paarweise verschiedenen Stützstellen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$, $i \neq j$).

(a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Polynome eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{P}_n = \{p \text{ Polynom} \mid \text{Grad } p \leq n\}$ bilden.

(b) Zeigen Sie, dass

$$\sum_{i=0}^{n} L_i(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis. Betrachte $p(x) = 1$ und die Interpolationsformel.

Aufgabe 1.6 (A+B)*

Durch Induktion zeigen Sie, dass

$$\delta^n y[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} y_j \prod_{i \neq j} \frac{1}{x_j - x_i}\,.$$

Danach zeigen Sie, dass die dividierten Differenzen $\delta^n y[x_0, \ldots, x_n]$ symmetrisch sind, d.h.

$$\delta^n y[x_{\sigma(0)}, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}] = \delta^n y[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

für jede beliebige Permutation σ von $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`