Serie 3

(Abgabe: 22. März 2011, 17 Uhr)

Aufgabe 3.1 *

Auf dem Intervall $[-2,1]$ sei die Funktion $f(x) = x^2\,|x|$ gegeben. Ist $f(x)$ bzgl. der folgenden Stützstellen ein kubischer Spline?

(a) $(x_0, x_1, x_2) = (-2, 0, 1)$.

(b) $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-2, -1, 0, 1)$.

(c) $(x_0, x_1, x_2) = (-2, -1, 1)$.

Hinweis. Es reicht die beiden Eigenschaften eines kubischen Splines nachzuprüfen.

Aufgabe 3.2 *

Gegeben seien die Stützpunkte $(0,0)$, $(1,3)$, $(2,-1)$ und $(3,0)$. Bestimmen Sie das lineare Gleichungssystem für den natürlichen interpolierenden Spline s zu diesen Daten. Berechnen Sie $s(1.5)$.

Aufgabe 3.3 (P)*

Gegeben seien die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1+25x^2}$ für $x \in [-1,1]$ und die Stützstellen

$$\left\{ x_j^{(n)} := -1 + \frac{2j}{n} \right\}_{j=0,1,\ldots,n}.$$

Schreiben Sie eine `matlab`-Routine `SplineNewton` zur Interpolation von $f(x)$ durch einen eingespannten Spline zu den Daten $(x_j^{(12)}, f(x_j^{(12)}))$ mit $j = 0, 1, \ldots, 12$, sowie durch ein Newton-Interpolationspolynom 12-ten Grades. Stellen Sie die beiden Interpolationen zusammen mit den Stützstellen graphisch dar.

Hinweis. Zur Spline-Interpolation verwenden Sie den `MATLAB`-Befehl `spline` mit `size(X) = size(Y)`. Zur Newton-Interpolation verwenden Sie Ihre `MATLAB`-Routine `Newton_Interpol` (siehe Aufgabe 1.4).

Info zu `MATLAB`. In `MATLAB` kann der eingespannte interpolierende kubische Spline mit Hilfe des Komandos `YY = spline(X,Y,XX)` berechnet werden. Dazu enthält der Vektor `X` die Stützstellen, der Vektor `Y` die zu interpolierenden Funktionswerte sowie als erstes und letztes Element die Steigungen $f'(x_0)$ und $f'(x_n)$, und `XX` die zu berechnenden Abzissen. Die zum Vektor `XX` gehörigen Werte der Splineapproximation stehen dann im Ausgabevektor `YY`. In dieser Variante des `spline`-Befehls gilt also `size(Y) = size(X)+2`. Sind die Längen der Vektoren `X` und `Y` gleich, so werden die zwei erforderlichen Zusatzbedingungen für die Eindeutigkeit des interpolierenden kubischen Splines aus der Forderung bestimmt, dass die dritten Ableitungen des Splines in den Knoten x_1 und x_{n-1} stetig sind.

Aufgabe 3.4 (P) (Glatte zweidimensionale Kurvendarstellung)

Zu einer gegebenen Folge von Punkten (x_k, y_k), $k = 1, \ldots, n$, in der Ebene soll eine interpolierende glatte Kurve $(x(t), y(t))$ durch diese Punkte konstruiert werden. Der Kurvenparameter t wird durch die Distanzen zwischen den aufeinanderfolgenden Punkten festgelegt:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \\ t_k &= t_{k-1} + \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}, \quad k = 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Man bestimmt zwei eingespannte Splines s_x und s_y durch die Stützpunkte (t_k, x_k) bzw. (t_k, y_k). Um die interpolierende Kurve $(x(t), y(t))$ darzustellen, zeichnet man dann s_x gegen s_y.

(a) Laden Sie die Datei `Points.dat` von der Webseite herunter, die eine Punktfolge (x_k, y_k) beschreibt. Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `PlotKurveSpline` zum Zeichnen der interpolierenden glatten Kurve durch diese Punkte. Ein Skelett des Codes `PlotKurveSpline.m` kann man von der Webseite herunterladen.

(b) Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `PlotSurprise` zum Zeichnen der Überaschung, die wir vorbereitet haben. Das Überaschungsbild besteht aus den interpolierenden glatten Kurven durch die Punkte, die in der Datei `PointsSurprise.dat` beschrieben ist. Die Anzahl der Punkte, die durch eine Kurve interpoliert werden sollen, ist in der Datei `NPointsSurprise.dat` gegeben, d.h. `NPointsSurprise(i)` ist die Anzahl der Punkte, welche durch die `i`-te Kurve interpoliert werden. Ein Skelett des Codes `PlotSurprise.m` kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 3.5 (A+B)*

Mit Hilfe der Formel von Newton soll das Hermite-Polynom $s_i(x)$ vom Grad 3 bestimmt werden, das für gegebene Werte y_{i-1}, y_i, p_{i-1}, $p_i \in \mathbb{R}$ die Bedingungen

$$s_i(x_{i-1}) = y_{i-1}\,, \quad s_i(x_i) = y_i\,, \quad s_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}\,, \quad s_i'(x_i) = p_i$$

erfüllt.

Hinweis. Ersetzen Sie die Bedingungen $s_i'(x_{i-1}) = p_{i-1}$ und $s_i'(x_i) = p_i$ durch

$$s_i(x_{i-1} + \varepsilon) = y_{i-1} + \varepsilon p_{i-1} \text{ und } s_i(x_i - \varepsilon) = y_i - \varepsilon p_i\,.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Schema der dividierten Differenzen die Koeffizienten des Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_{i-1}, x_i, $x_{i-1} + \varepsilon$ und $x_i - \varepsilon$ (in dieser Reihenfolge). Lassen Sie $\varepsilon \to 0$. Damit können Sie

$$\begin{aligned} s_i(x) =& y_{i-1} + (x - x_{i-1})\delta y[x_i, x_{i-1}] \\ &+ \frac{(x - x_{i-1})(x - x_i)}{h_{i-1}^2}\Big((p_i - \delta y[x_i, x_{i-1}])(x - x_{i-1}) + (p_{i-1} - \delta y[x_i, x_{i-1}])(x - x_i)\Big) \end{aligned}$$

mit $h_{i-1} := x_i - x_{i-1}$ berechnen.

Aufgabe 3.6 (A+B)

Sei A eine $n \times n$ reelle strikt diagonal dominante Matrix. Zeigen Sie, dass A invertierbar ist.

Hinweis. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $x \neq 0$. Überlegen Sie sich, dass es reicht $Ax \neq 0$ zu zeigen. Wählen Sie dafür $k \in \mathbb{N}$ mit $|x_k| = \max_j |x_j|$ und betrachten Sie den k-ten Eintrag von $Ax \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3.7 (A+B)*

Für Funktionen $v \in \mathcal{C}^2([a,b])$ definieren wir $J[v] = \int_a^b (v''(x))^2 \, dx$. Betrachten Sie den natürlichen interpolierenden Spline s durch die Stützpunkte (x_k, y_k), $k = 0, 1, \ldots, n$, mit $y_k = f(x_k)$, wobei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie, dass $J[s] \leq J[f]$.

Hinweis. Zeigen Sie zuerst, dass $\int_a^b s''(x)(f''(x) - s''(x)) \, dx = 0$ und benutzen Sie dann die Formel $u^2 - v^2 = (u-v)^2 + 2v(u-v)$.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`