Serie 4

(Abgabe: 29. März 2011, 17 Uhr)

Hinweis. Da der Satz von Taylor sowohl in der Vorlesung, als auch in den Übungen häufig gebraucht wird, wiederholen wir ihn hier.

Satz von Taylor. *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein aus mehr aus einem Punkt bestehendes Intervall. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetige differenzierbare Fuktion und $x_0 \in I$ und sei $h \in \mathbb{R}$ derart, dass $x_0 + h \in I$. Dann existiert ein $\xi \in [x_0, x_0 + h]$, so dass*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,.$$

[Aus "Analysis 1" von Otto Forster, mit angepassten Bezeichnungen.]

Aufgabe 4.1 *

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dreimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq Ch^2, \quad 0 < h \leq h_0$$

und bestimmen Sie C (unabhängig von h).

Aufgabe 4.2 (P)*

Schreiben Sie eine `MATLAB`-Routine `MeineSumme` zur Berechnung die Summe

$$s := 100 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots - \frac{1}{10000}$$

auf zwei Arten:

a) von links nach rechts

b) von rechts nach links.

Erklären Sie den Unterschied nach der elften Dezimalstelle und vergleichen Sie mit dem exakten Resultat

$$s = 99.69309718305994529172.$$

Hinweis. Der Befehl `format long` bewirkt, dass alle Dezimalstellen angezeigt werden.

Aufgabe 4.3 (P)

Schreiben Sie eine MATLAB-Routine `ApproxAbleitung` um die 1. Ableitung von $\sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 25$ mit Schrittweiten $h_i = 2^{-i}$, $i = 1, 2, \ldots, 60$ mit Hilfe der zentralen Differenzenquotienten zu berechnen. (Siehe der Satz 2 aus der Vorlesung.) Zeichnen Sie den Fehler bezüglich h_i auf einer `loglog`-Skala.

Vergleichen Sie den experimentell bestimmten Wert h_{min}, für den der Fehler minimal ist, mit der theoretischen Voraussage

$$h^*_{min} \simeq 2 \left(\frac{3\, eps\, |f(x_0)|}{|f'''(x_0)|} \right)^{1/3} .$$

Hinweis. Ein Skelett des Codes `ApproxAbleitung.m` kann man von der Webseite herunterladen.

Aufgabe 4.4 (A+B)*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viermal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \right| \leq Ch^2, \quad h \leq h_0$$

und bestimmen Sie C (unabhängig von h).

Aufgabe 4.5 (A+B)

Sei $p_n(x)$ das Interpolationspolynom n-ten Grades durch die äquidistanten Stützpunkte (x_k, y_k), $x_k = x_0 + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d^n p_n}{dx^n}(x) = \frac{1}{h^n} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} y_i.$$

Hierbei ist

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}, \quad 0! = 1.$$

Hinweis. Verwenden Sie die Interpolationsformel von Newton um einen einfachen Ausdruck für die n-te Ableitung von $p_n(x)$ zu finden. Verwenden Sie nun die Aufgabe 1.6 und überlegen Sie sich, wie sich diese Formel für die dividierten Differenzen im Falle von äquidistanten Stützstellen vereinfachen lässt.

Aufgabe 4.6 (A+B)

Zeigen Sie, dass die Kondition submultiplikativ ist. Das heisst, gegeben ein Problem (P_1) mit Kondition κ_1 und ein Problem (P_2) mit Kondition κ_2, so gilt für die Kondition κ des zusammengesetzten Problems $(P) = (P_2 \circ P_1)$ (d.h. $P(x) = P_2(P_1(x))$)

$$\kappa \leq \kappa_1 \cdot \kappa_2 .$$

Berechnen Sie damit die Kondition der Division zweier reeller Zahlen.

Hinweis. Berechnen Sie zuerst die Kondition von dem Problem $\tilde{P}(x) = {}^1\!/_x$.

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`